

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

ХІІ клас

Зад.1 Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 cm^2 . Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

(7 точки)

Зад.2 В правоъгълния $\triangle ABC$ точката M е средата на медианата към хипотенузата AB . От M са спуснати перпендикулярите MX , MY и MZ към BC , AC и AB ($X \in BC, Y \in AC, Z \in AB$). Ако лицето на $\triangle ABC$ е S , то да се изрази лицето на $\triangle XYZ$ чрез S .

(7 точки)

Зад.3 Даден е изразът $M = \frac{\sqrt{4a^2 - 4a + 1} + a\sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 4 - \frac{2}{a}}{a} \cdot \sqrt{4a - 4 + \frac{1}{a}}$.

а) Да се опрости M

б) Да се пресметне числената стойност на M , ако a е най-големият от корените на уравнението $(2x^2 - x - 6)^2 + (2x^2 + x - 6)^2 = 4x^2$.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

Указание за проверка

ХІІ клас

Зад.1 Нека страните на перпендикулярното сечение са $a=9x$, $b=10x$ и $c=17x$ (0,5точки), откъдето полупериметъра $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9x+10x+17x}{2} = 18x$ (1точка). Лицето на сечението е

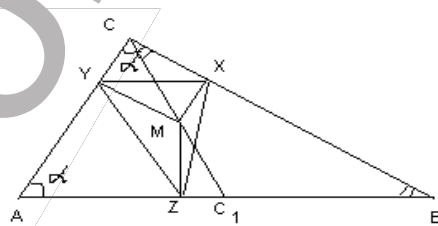
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 144 \Rightarrow x = 2 \text{ (1 точка)}.$$

Намиране страните a , b и c на перпендикулярното на наклонения рѣб l сечение-18 см, 20 см и 34см (1,5 точки). От $l \perp (ABC) \Rightarrow l \perp AB, l \perp AC$ и $l \perp BC$ (1,5 точки).

Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника:
 $S = l \cdot AB + l \cdot AC + l \cdot BC = l \cdot (a + b + c) = 4 \cdot 72 = 288 \text{ см}^2$ (1,5 точки).

Зад.2 Нека CC_1 -медиана към хипотенузата AB , M -среда на CC_1 и $CM = MC_1 = m$. Знаем, че $AC_1 = BC_1 = CC_1 \Rightarrow AB = 4m$ и ако $\angle CAB = \angle ACC_1 = \alpha$, то $\angle ABC = \angle BCC_1 = 90^\circ - \alpha$ (0,5точка).

От правоъгълните триъгълници MXC , MYC и MZC_1 , следва че $MX = m \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = m \cdot \cos \alpha$, $MY = m \cdot \sin \alpha$ и $MZ = m \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = m \cdot \sin 2\alpha$ (1,5 точки).



$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ} = S_{\Delta MXY} + S_{\Delta MYZ} + S_{\Delta MXZ} = \frac{1}{2} MX \cdot MY \sin 90^\circ + \frac{1}{2} MY \cdot MZ \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} MX \cdot MZ \sin(90^\circ + \alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ} = \frac{1}{2} (MX \cdot MY + MY \cdot MZ \sin \alpha + MX \cdot MZ \cos \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 \sin \alpha \cos \alpha + m^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha + m^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha) = \frac{1}{2} m^2 (\sin \alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \right) = \frac{3}{4} m^2 \sin 2\alpha \text{ (2,5точки)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4m \sin \alpha \cdot 4m \cos \alpha = 8m^2 \sin \alpha \cos \alpha = 4m^2 \sin 2\alpha \text{ (2точки)} \Rightarrow S_{\Delta XYZ} = \frac{3}{16} S \text{ (0,5 точки)}.$$

Зад.3 а) Допустимите стойности на променливата са $a > 0$, $a \neq \frac{1}{2}$ (0,5 точки).

$$M = \frac{\sqrt{(2a-1)^2} + a\sqrt{(2a-1)^2} + \frac{2(2a-1)}{a}}{\sqrt{\frac{(2a-1)^2}{a}}} \Leftrightarrow M = \frac{\frac{|2a-1|}{a} + a|2a-1| + \frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}} \Leftrightarrow$$

$$M = \frac{\frac{1+a^2}{a}|2a-1| + \frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}} \Leftrightarrow M = \frac{(1+a^2)|2a-1| + 2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|} \Leftrightarrow M = \frac{1+a^2}{\sqrt{a}} + \frac{2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|} \text{ (2,5точки)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a^2-1}{\sqrt{a}} \text{ за } a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \text{ и } M = \frac{a^2+3}{\sqrt{a}} \text{ за } a \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \text{ (1 точка)}.$$

$$\text{б) } (2x^2 - x - 6)^2 + (2x^2 + x - 6)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow ((2x^2 - 6) - x)^2 + ((2x^2 - 6) + x)^2 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 - 6)^2 + 2x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow (2x^2 - 6)^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 ;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{3}{2} \text{ (2 точки)} \Rightarrow a = 2 \text{ и от } 2 \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \Rightarrow M = \frac{a^2+3}{\sqrt{a}} = \frac{4+3}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ (1 точка)}.$$