Общински кръг на LVII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2008 година – София

12. клас

1. а) Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$, където

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x-2}{\sqrt{x^2+1}-1} \text{ и } b = \lim_{x \to 9} \frac{2\sqrt{x-5}-4}{3-\sqrt{x}}.$$ **4 точки**

б) Да се намери най-малкият член на редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, ако $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2 + 12$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. **3 точки**

2. Графиката на функцията $y = \dfrac{x-3-\sqrt{3}}{x-1}$ пресича координатните оси $Ox^{\rightarrow}$ и $Oy^{\rightarrow}$ съответно в точки A и B. Допирателните към графиката на функцията в точките A и B се пресичат в точката C.

а) Намерете координатите на точка C; **5 точки**

б) Докажете, че триъгълникът ABC е равностранен. **2 точки**

3. Дадена е правилната четириъгълна пирамида ABCDM с основен ръб AB = 1 и $\measuredangle BMC = \varphi$. Върху околните ръбове BM и DM са взети съответно точките P и Q, така че $CP \perp BM$ и $CQ \perp DM$. Да се намери:

а) дължината на отсечката PQ; **2 точки**

б) градусната мярка на φ, ако разстоянието от Q до равнината (APC) е равно на $\dfrac{1}{2}$. **5 точки**