МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

XI клас

<u>Зад.1</u> Сумата от първите десет члена на аритметична прогресия е 140, а произведението на втория и деветия член е 147. Намерете прогресията.

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Трапецът ABCD(AB││CD, AB>CD) е вписан в окръжност с радиус R .

а) Докажете, че ако в трапеца може да се впише окръжност, то малката основа, височината и голямата основа са последователни членове на геометрична прогресия.

б) Намерете малката основа, бедрото и лицето на трапеца, ако голямата основа AB служи за диаметър на описаната окръжност и $\measuredangle ACD = \alpha$ **.**

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ е с положителни членове и частно q, а аритметичната прогресия $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ е растяща с разлика d. При какво условие уравненията $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ и $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}} + ... = \frac{1}{2}$ ще бъдат еквивалентни?

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

XI клас

<u>Зад.1</u> Съгласно условието на задачата $\begin{cases} 2a_1 + 9d = 28 \\ (a_1 + d)(a_1 + 8d) = 147 \end{cases}$ **(2точки),** откъдето

$\left(\dfrac{28-7d}{2}\right)\left(\dfrac{28+7d}{2}\right) = 147$ **(1точка)** $\Rightarrow d = \pm 2$ **(2точки)** $\Rightarrow a_1 = 5$ или $a_1 = 23$ **(2точки)**. Прогресията е 5,7,9,… или 23,21,19,…. .

<u>Зад.2</u> а) Щом трапецът е вписан в окръжността, то той е равнобедрен, т.е. BC=AD(**1точка**). Ако трапецът е описан около окръжност, то AB+CD=BC+AD=2AD(**1точка**). Ако DH е височината на трапеца, то $DH^2 = AD^2 - AH^2 = \left(\dfrac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2 = AB.CD$, с което твърдението е доказано(**1точка**).

б) Тъй като $\measuredangle ACD = \alpha$, то $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 2\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 180^0 - 4\alpha \Rightarrow \measuredangle DAC = 90^0 - 2\alpha$ (**1точка**).

От синусова теорема намираме $CD = 2R\sin(90^0 - 2\alpha) = 2R\cos 2\alpha$ и $AD = 2R\sin\alpha$ (**1точка**).

$\Rightarrow DH^2 = AD^2 - \left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - R^2(1-\cos 2\alpha)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin^4\alpha = R^2\sin^2 2\alpha$

$\Rightarrow DH = R\sin 2\alpha$ **(1точка)**

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD).DH}{2} = 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$ (**1точка**).

<u>Зад.3</u> Уравнението (1) $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ има смисъл при y>0, y≠1(**1точка**). Извършваме преобразувания и получаваме $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[d]{y}} \dfrac{a_n}{a_1} = b_n - b_1 \Leftrightarrow$

$(\sqrt[d]{y})^{b_n - b_1} = \dfrac{a_n}{a_1} \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_n - b_1}} = \left(\dfrac{a_1 q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_1 + (n-1)d - b_1}} = q^{\frac{(n-1)d}{(n-1)d}} = q$ (**1точка**). Тъй като $q>0$ и $q \neq 1$, то $y=q$ е единственото решение на уравнението **(1точка)**.

Лявата страна на уравнението (2) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^4}{8} + \ldots + (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{2^{n-1}} + \ldots = \dfrac{1}{2}$ е сума на безкрайната геометрична прогресия $x, -\dfrac{x^2}{2}, \dfrac{x^3}{4}, -\dfrac{x^4}{8}, \ldots, (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{2^{n-1}}, \ldots$ с първи член x и частно

$\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{x} = -\dfrac{x}{2}$ (**1точка**). Ако $\left|-\dfrac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2;2)$, то сумата $S = \dfrac{x}{1-(-\dfrac{x}{2})}$ (**1точка**).

Уравнението $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^4}{8} + \ldots + (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{2^{n-1}} + \ldots = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{2+x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \in (-2;2)$ **(1точка)**.

Следователно уравненията (1) и (2) ще бъдат еквивалентни, ако $q = \dfrac{2}{3}$ (**1точка**).