Общински кръг на LVII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2008 година – София

11. клас

1. Намерете стойностите на параметъра a, за които множеството от решения на системата $\begin{cases} 4^x - 2^{x+1} - 3 \geq 0 \\ \log_a \frac{1}{2} . \log_2 x \leq 1 \end{cases}$ е краен затворен интервал.

7 точки

2. Даден е $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ъгли $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$ и лице S.

а) Намерете S, ако страните a, b и c, взети в този ред, образуват аритметична прогресия и $a = \sqrt{6}$, $\gamma = 135^0$. **3 точки**

б) Ако $\beta = \frac{\pi}{8}$ и $\gamma = \frac{5\pi}{8}$, докажете, че $S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}$. **4 точки**

3. Дадена е числовата редица $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, за която е изпълнено равенството $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = 2.3^n - 2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

а) Намерете формула за общия член a_n на редицата и докажете, че $A = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + ... + a_n) - n$ е четно число за всяко $n \in \mathbb{N}$. **3 точки**

б) Докажете,че изразът $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + ... + na_n - 1$ се дели на 3^n за всяко $n \in \mathbb{N}$. **4 точки**