МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x+b+28a\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията y = $-2x^2+4x+1$ в интервала [-3;0].

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката A, пресича окръжност в точките B и C точката (B лежи между точките A и C). Друга права, минаваща през точката A, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките A и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

а) Да се докаже, че ∠EDF=∠BCF.

б) Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

X клас

Зад.1 Допустимите стойности на променливите са x>0, y≥0, x≠y **(1,5 точки)**.

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-(x^2+y^2)\ \textbf{(2точки)}=\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-y^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{x-y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-x^2-y^2\ \textbf{(1,5точки)}$$

$$=\frac{x^3-y^3}{x^{\frac{2}{3}}\left(x-y\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x-y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}-xy-x^2-y^2=\frac{x^3-y^3}{\left(x-y\right)}-xy-x^2-y^2=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{\left(x-y\right)}-xy-x^2-y^2$$

$=x^2+xy+y^2-xy-x^2-y^2=0$ **(2точки)**.

Зад.2 Върхът (x_0, y_0) на параболата y= $-2x^2+4x+1$ е с координати $x_0=-\frac{b}{2a}=1$ и $y_0=y(1)=3$.

Определяме $y(0)=1$-пресечна точка с ординатната ос, а от $-2x^2+4x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$-пресечни точки с абсцисната ос. От $a=-2<0\Rightarrow$ най-малката стойност b на функцията y в интервала [-3;0] е $b=y(-3)=-29$ **(1 точка)** и най-голямата стойност a на функцията y в интервала [-3;0] е $a=y(0)=1$ **(1 точка)**.

$$x+b+28a\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\Leftrightarrow x-1\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\ \textbf{(0,5 точки)}.$$

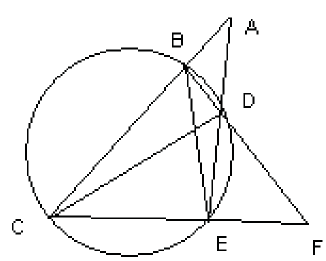
Дефиниционната област на неравенството е $x\ne-1, x\ne2$ **(1 точка)**.

Преобразуваме неравенството и получаваме

$$x-1\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\Leftrightarrow x-1\le\frac{2x+7}{x+1}-\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)}\le0\ \textbf{(2 точки)}.$$

Следователно $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,2)\cup(2,3]$ **(1,5 точки)**.

Зад.3 **а)** ∠EDF+∠EDB=180^0/съседни ъгли/(**0,5 точки**) и ∠BCE+∠EDB=180^0/CEDB-вписан/(**1 точка**), откъдето∠EDF=∠BCF (**0,5 точки**).



б) Триъгълниците ADC и ABE са подобни, защото имат общ ъгъл, а ъглите ACD и AEB се опират на хордата BD, т.е. ∠ACD=∠AEB (**1,5 точки**). Тогава $\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AE}=2$ (**0,5 точки**).

Аналогично ΔBEF~ΔCDF(**1,5 точки**), следователно $\frac{DF}{EF}=\frac{CD}{BE}=\frac{CF}{BF}=2$ (**0,5 точки**), откъдето $DF=2EF=2$ (**1точка**).