Общински кръг на LVII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2008 година – София

10. клас

1. За линейната функция $f(x)$ са в сила равенствата $f(0)=-1$ и $f(f(0))=-3$.

а) Постройте графиката на функцията $y=g(x)=\begin{cases} f(x)+2, & x<0; \\ f^2(x), & 0\le x\le \frac{5}{4}; \\ \frac{15}{4}-f(x), & x>\frac{5}{4}. \end{cases}$

Намерете стойностите на параметъра *m*, за които уравнението $g(x)=m$ има два реални корена. **4 точки**

б) Намерете стойностите на реалния параметър *k*, за които множеството от решенията на неравенството $f(x).\left[\log_2 \log_3 3^k - f(x)\right]\ge 0$ е интервал с дължина $\frac{1}{2}$. **3 точки**

2. Решете неравенството $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{|x|-1}{x+1}}\ge\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{x}{6}}$ и проверете дали числото

$a=\dfrac{2}{3^{\frac{3}{4}}+3^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\sqrt[4]{3}$ е негово решение. **7 точки**

3. а) Намерете най-голямата стойност на функцията

$f(x)=-\left(9x^2-12x+8\right)^2+3\left(9x^2-12x+8\right)+1$. **3 точки**

б) Решете уравнението $3^{\sqrt{9x^2-12x+8}}=12x-4x^2$ **4 точки**