РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
18.03.2007г.

XII клас

Зад. 1. **а)** Да се докаже, че за всеки две неотрицателни числа x и y е изпълнено неравенството $x^2y^2 + x + y - 3xy \geq 0$

(4 точки)

б) Дадена е функцията $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1).x - 1$. Намерете за кои стойности на реалния параметър а е изпълнено $y_{min} + y_{max} = 2a^3 + a^2 + 3$, където с y_{min} и y_{max} са означени локалните екстремуми на функцията $y=f(x)$.

(4 точки)

Зад. 2. Ъглите α, β, γ на ΔABC, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $\cos\alpha + tg\beta + \sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$.

(6 точки)

Зад. 3. Ръбът MA на тетраедъра ABCM е перпендикулярен на основата ABC, ΔABC е правоъгълен с прав ъгъл при върха B и MA=AB=BC=a. Ако точките N и P са среди съответно на CM и AB, да се докаже, че NP⊥AB, NP⊥CM и да се намери дължината на NP. **(6 точки)**

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

math-bg.com

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
18.03.2007г.
Указание за проверка
XII клас

Зад.1.а) $x^2y^2+x+y-3xy \geq x^2y^2-3xy+2\sqrt{xy}$ *(използваме, че* $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$*)* **(2 точки)**

$x^2y^2-3xy+2\sqrt{xy}+1-1=(xy-1)^2-(\sqrt{xy}-1)^2=(\sqrt{xy}-1)^2(\sqrt{xy}+1)^2-(\sqrt{xy}-1)^2=$

$(\sqrt{xy}-1)^2(\sqrt{xy}+1-1)(\sqrt{xy}+1+1)=\sqrt{xy}(\sqrt{xy}+2)(\sqrt{xy}-1)^2 \geq 0$ *завсякох* $\geq 0, y \geq 0$

(2 точки)

б) За правилно намиране на корените на уравнението $f'(x)=0$ **(1 точка).**

Пресмятане на $y_{\min}$ **(1точка)** и $y_{\max}$ **(1точка).** Заместване в условието $y_{\min}+y_{\max}=2a^3+a^2+3$, решаване на полученото уравнение и получаване на стойностите *a = -1* или *a = - 5*. **(1точка).**

Зад. 2. α,β,γ образуват аритметична прогресия⇒2β=α+γ,

$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{180^0-\beta}{2} \Rightarrow \beta=60^0$ **(2точки)** $\Rightarrow \alpha=60^0-x, \gamma=60^0+x$

$\cos(60^0-x)+tg60^0+\sin(60^0+x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+1 \Rightarrow \sin(30^0+x)+\sqrt{3}+\sin(60^0+x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$

$\Rightarrow 2\sin(45^0+x)\cos 15^0=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\cos 15^0=\cos(45^0-30^0)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow \sin(45^0+x)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

$\cos 15^0=\sin 75^0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow x=30^0$ **(3точки)**⇒α=30 ^{0},γ=90 ^{0} **(1точки)**

Зад. 3. От MA⊥(ABC)⇒MA⊥AB, MA⊥AC

От MA=AB=BC=*a* и ΔMAB, ΔMAC, ΔABC-правоъгълни⇒

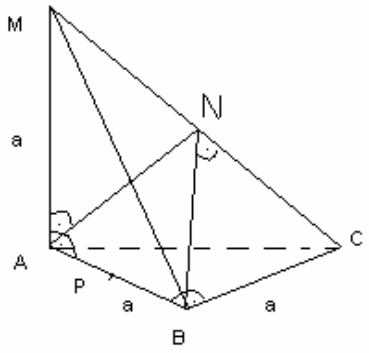
$MB=a\sqrt{2}, AC=a\sqrt{2}, MC=a\sqrt{3}$

AB-ортогонална проекция на MB върху (ABC) и AB⊥BC⇒MB⊥BC⇒

ΔBCM≅ΔAMC ⇒BN=AN⇒NP⊥AB **(3 точки)**

Аналогично ΔAPM≅ΔBPC⇒PC=PM⇒PN⊥CM **(2точки)**

От правоъгълния ΔPCN намираме, че PN=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **(1точка)**



math-bg.com