**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА**
**ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**
**18.03.2007г.**

**X клас**

**Зад. 1. а)** Да се реши неравенството $\frac{3(x-1)(x^2+4x+4)}{(x^2+1)(x+1)(x^2-x-2)} \geq 0$.

**(4 точки)**

**б)** Да се провери числото

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$$

решение ли е на даденото неравенство.

**(3 точки)**

**Зад.2.** Докажете, че за допустимите стойности на параметъра $a$ е изпълнено:

$$\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1}+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right).\frac{a^{-\frac{7}{12}}}{2}=\log_2\frac{0{,}125\sqrt{2}}{8^{-1}}$$

**(7 точки)**

**Зад. 3.** Дадена е окръжност с център точка O и радиус R и точка M(OM>R). Допирателните от точката M към окръжността я допират в точките A и B. Перпендикулярът от A към диаметъра BD го пресича в точка C. Да се докаже, че правата MD минава през средата на отсечката AC

**(6 точки)**

**Време за работа-4 часа.**

***Желаем Ви успех!***

math-bg.com

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА**
**ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**
**18.03.2007г.**

**Указание за проверка**

**X клас**

**Зад.1. а)** $\frac{3(x-1)(x^2+4x+4)}{(x^2+1)(x+1)(x^2-x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)} \geq 0$ **(1,5 точки)**

Определяне на допустимите стойности x ≠ -1 и x ≠ 2 **(1 точка)**

Определяне на решенията на неравенството: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1] \cup (2,+\infty)$ **(1,5 точки)**

**б)** Рационализираме всяка от дробите в знаменателя и получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} = \sqrt{2}-\sqrt{8} = -\sqrt{2}$$

**(2 точки)**

Следователно А е решение на неравенството **(1 точка)**

**Зад.2**. $a - \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a^2}-1\right) = \sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a}+1\right)$ **(1 точка).**

$a + \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a}+1\right)$ **(0,5 точки).**

$\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1} - \frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right) = \sqrt[3]{a}$ **(1 точка).**

$(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3})\sqrt[4]{a} = \sqrt{a}+a$ **(0,5 точки).**

$(\sqrt{a}+1)(1-\sqrt{a}) = 1-a$ **(0,5 точки).**

$\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1} + \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right) = \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}+1)\sqrt[4]{a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(1 точка).**

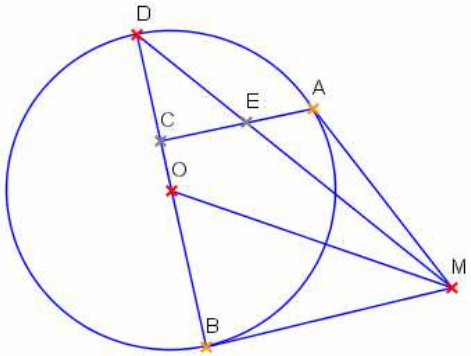
$\Rightarrow \left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}\,\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1} + \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right) \cdot \frac{a^{-\frac{7}{12}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{2\sqrt[12]{a^7}} = \frac{1}{2}$ **(1 точка)**, тъй като

$\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^7}$ **(0,5 точки)** и $a^{-\frac{7}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7}}$ **(0,5 точки).**

За дясната страна имаме $\log_2 \frac{0{,}125\sqrt{2}}{8^{-1}} = \frac{1}{2}$ **(0,5 точки)**, с което равенството е доказано**.**

math-bg.com

**Зад.3.**




Нека $MD \cap AC=E$.

$\angle CDA=\frac{1}{2}\angle BOA=\angle BOM$ **(1точка)**

$\Delta CDE \sim \Delta BDM \Rightarrow \frac{CE}{CD}=\frac{BM}{BD}(1)$ **(2 точки).**

$\Delta CDA \sim \Delta BOM \Rightarrow \frac{CD}{AC}=\frac{BO}{BM}(2)$ **(2 точки).**

От (1) и (2) следва, че $\frac{CE}{AC}=\frac{BO}{BD}=\frac{1}{2} \Rightarrow AC=2CE \Rightarrow CE=EA$ **(1 точка).**

math-bg.com