

## Международно състезание “Европейско Кенгуру”

21 март 2009 г.

### ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. **ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути.** Пожелаваме Ви успех!

1. В един аквариум има 200 рибки. Точно 1% от тях са сини, а всички останали са жълти. Колко жълти рибки трябва да бъдат извадени от аквариума, за да станат сините рибки 2% от останалите?

- A) 2                      B) 4                      C) 20                      D) 50                      E) 100

2. Кое от посочените числа е най-голямо?

- A)  $\sqrt{2} - \sqrt{1}$       B)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$       C)  $\sqrt{4} - \sqrt{3}$       D)  $\sqrt{5} - \sqrt{4}$       E)  $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

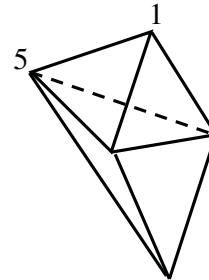
3. За колко различни цели положителни числа  $n$  числото  $n^2 + n$  е просто?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) за краен брой, но повече от 2      E) за безкраен брой

4. Мария, Вяра и Оля отишли в сладкарница и всяка от тях купила по три сока, два сладоледа и пет бонбона. Кое от посочените числа може да показва общата им сметка в левове?

- A) 15,92      B) 15,82      C) 15,72      D) 15,62      E) 15,52

5. Показаното тяло е образувано от 6 триъгълника. Във всеки от 5-те върха на тялото е поставено по едно число така, че сумата на числата в трите върха на всеки от 6-те триъгълника е една и съща. Намерете сумата на числата в 5-те върха на тялото, ако две от числата са 1 и 5, както е показано.



- A) 9      B) 10      C) 12      D) 17      E) 24

6. Окръжностите  $k_1(O_1;13)$  и  $k_2(O_2;15)$  се пресичат в точките  $P$  и  $Q$ . Ако дължината на отсечката  $PQ$  е 24, то дължината на отсечката  $O_1O_2$  може да бъде равна на:

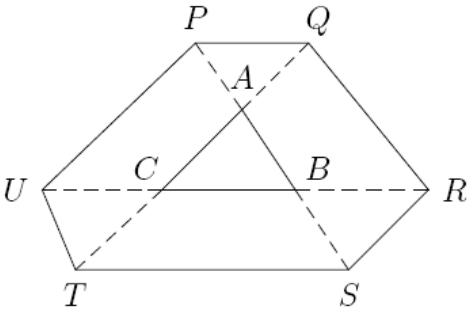
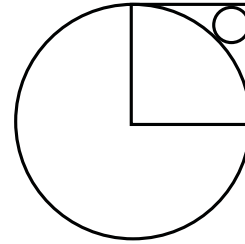
- A) 2                      B) 5                      C) 9                      D) 4                      E) друг отговор

7. В една кутия са поставени 2 бели, 3 червени и 4 сини чорапа. Любка знае, че една трета от чорапите в кутията имат дупки, но не знае цвета на скъсаните чорапи. Тя вади един по един чорапи от кутията, докато не получи здрав чифт едноцветни чорапи. Колко най-малко чорапа трябва да извади Любка от кутията, за да е сигурна, че ще се случи исканото от нея?

- A) 2                      B) 3                      C) 6                      D) 7                      E) 8

8. Ако квадратът на чертежа има страна с дължина 1, то радиусът на по-малката окръжност е равен на:

- A)  $\sqrt{2} - 1$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$   
 D)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$       E)  $(1 - \sqrt{2})^2$



9. Страните на  $\Delta ABC$  с лице 1 са продължени в двете посоки така, че  $PA = AB = BS$ ,  $TC = CA = AQ$  и  $UC = CB = BR$ . Да се намери лицето на шестоъгълника  $PQRSTU$ .

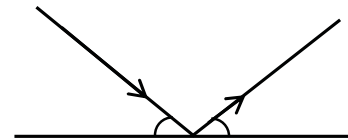
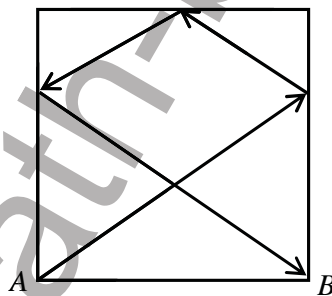
- A) 9      B) 10      C) 12      D) 13  
 E) не може да се определи от даденото

10. Квадратчетата от таблицата на чертежа трябва да бъдат оцветени в цветовете  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  така, че съседните квадратчета да не са едноцветни (съседни са всеки две квадратчета, които имат общ връх). Някои от квадратчетата са оцветени, както е показано. В какви цветове може да бъде оцветено затъмненото квадратче?

- A)  $A$  или  $B$       B) само  $C$       C) само  $D$       D)  $C$  или  $D$   
 E) в кой да е от четирите цвята

$A$	$B$			
$C$	$D$			
		$B$		
$B$				

11. От ъгъла  $A$  на билиардна маса с квадратна форма е изстреляна топка. След като се удря три пъти в стените на масата, както е показано на чертежа, топката отива в ъгъл  $B$ . Ако страната на квадрата е 2 метра, колко метра е изминала топката?



(Не забравяйте, че топката отскача под същия ъгъл, под който се удря, както е показано на дясната фигура).

- A) 7      B)  $2\sqrt{13}$       C) 8      D)  $4\sqrt{3}$       E)  $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

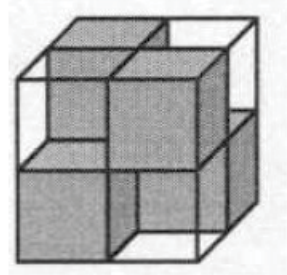
12. Две хиляди и девет кенгурчета, всяко от които е или светло, или тъмно, се сравняват по височина. Оказало се, че едно светло кенгурче е по-високо от точно 8 тъмни кенгурчета, друго светло кенгурче е по-високо от точно 9 тъмни кенгурчета, трето светло кенгурче е по-високо от точно 10 тъмни кенгурчета, и така нататък, има светло кенгурче, което е по-високо от всички тъмни кенгурчета. Колко са светлите кенгурчета?

- A) 1000      B) 1001      C) 1002      D) 1003      E) описаното е невъзможно

13. На един остров живеят само рицари и лъжци. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. Двадесет и пет жители на острова се наредили на опашка един след друг. Всеки, освен първия, твърдял, че стоящият пред него е лъжец, а първият твърдял, че всички след него са лъжци. Колко са лъжците на опашката?

- A) 13      B) 12      C) 0      D) 24      E) друг отговор

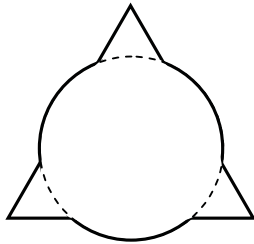
14. На фигурата е показан куб с размери  $2 \times 2 \times 2$ , образуван от 4 прозрачни кубчета с размери  $1 \times 1 \times 1$  и 4 непрозрачни кубчета с размери  $1 \times 1 \times 1$ . Малките кубчета са подредени така, че големият куб е непрозрачен, тоест не може да се вижда през него нито отгоре надолу, нито отпред назад, нито отляво надясно. Колко най-малко непрозрачни кубчета  $1 \times 1 \times 1$  трябва да се използват, за да се направи непрозрачен куб с размери  $3 \times 3 \times 3$ ?



- A) 6      B) 9      C) 10      D) 12      E) 18

15. Коя е цифрата на единиците на стойността на израза  $1^2 - 2^2 + \dots - 2008^2 + 2009^2$ ?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

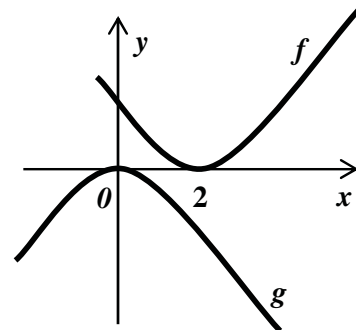


16. Нека застъпим равностранен триъгълник със страна 3 и окръжност с радиус 1 така, че центровете им да съвпадат, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на получената фигура.

- A)  $3 + 2\pi$       B)  $6 + \pi$       C)  $9 + \frac{\pi}{3}$   
D)  $3\pi$       E)  $9 + \pi$

17. На чертежа са построени графиките на функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  в една и съща координатна система. Коя е вярната зависимост за двете функции?

- A)  $g(x) = f(x+2)$       B)  $g(x-2) = -f(x)$   
C)  $g(x) = -f(-x+2)$       D)  $g(-x) = -f(-x+2)$   
E)  $g(2-x) = -f(x)$

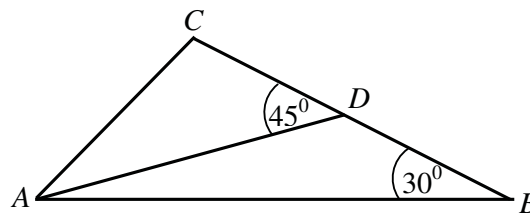


18. В Олимпиада по математика участвали 100 ученици, които трябвало да решат 4 задачи. Деветдесет ученици решили първата задача, 85 решили втората, 80 – третата и 70 – четвъртата. Какъв е възможно най-малкият брой участници, решили всички задачи?

- A) 10      B) 15      C) 20      D) 25      E) 30

19. Даден е  $\triangle ABC$  с  $\angle ABC = 30^\circ$ . Да се намери мярката на  $\angle CAD$ , ако  $\angle ADC = 45^\circ$  и  $D$  е средата на страната  $BC$ .

- A)  $45^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $25^\circ$   
D)  $20^\circ$       E)  $15^\circ$



20. В квадратната таблица  $3 \times 3$  от чертежа са записани реални числа така, че сумата на числата във всеки ред, всяка колона и двата диагонала е една и съща (т.е. квадратът е магически). На колко е равно числото  $a$ ?

- A) 16      B) 51      C) 54      D) 55      E) 110

$a$		
		47
	63	

21. Намерете броя на 10-цифрените числа, чиито цифри са 1, 2 или 3, като всеки две съседни цифри се различават точно с единица.

- A) 16      B) 32      C) 64      D) 80      E) 100

22. Бегачите  $A$  и  $B$  обикалят стадион, като всеки от тях тича с постоянна скорост. Бегачът  $A$  тича по-бързо от  $B$  и обикаля стадиона за 3 минути.  $A$  и  $B$  тръгват едновременно и след 8 минути  $A$  настига  $B$  за пръв път. За колко време  $B$  прави една обиколка на стадиона?  
 А) 6 мин.    В) 8 мин.    С) 4 мин. и 30 сек.    Д) 4 мин. и 48 сек.    Е) 4 мин. и 20 сек.

23. Нека  $Z$  е броят на 8-цифрените естествени числа с различни цифри, в които не участва 0. Колко е броят на числата в  $Z$ , които се делят на 9?

А)  $\frac{Z}{8}$     В)  $\frac{Z}{3}$     С)  $\frac{Z}{9}$     Д)  $\frac{8Z}{9}$     Е)  $\frac{7Z}{8}$

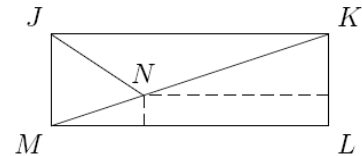
24. За колко цели положителни числа  $n \geq 3$  съществува изпъкнал  $n$ -ъгълник, чиито ъгли се отнасят както  $1:2:\dots:n$ ?

А) 1    В) 2    С) 3    Д) 5    Е) повече от 5

25. В Олимпиада по математика участвали 55 ученици. При проверката на решенията журито отбелязвало с „+“ всяка вярно решена задача, с „-“ всяка погрешно решена задача и с „0“ всяка задача, която съответният ученик не е решавал. Накрая се оказало, че няма две писмени работи, в които броят на „+“ и на „-“ е един и същ. Какъв е възможно най-малкият брой задачи, дадени на Олимпиадата?

А) 6    В) 9    С) 10    Д) 11    Е) 12

26. В правоъгълника  $MLKJ$  от чертежа ъглополовящата на  $\angle KJM$  пресича диагонала  $MK$  в точката  $N$ . Разстоянията от  $N$  до правите  $LM$  и  $KL$  са съответно 1 и 8. Намерете дължината на отсечката  $LM$ .



А)  $8+2\sqrt{2}$     В)  $11-\sqrt{2}$     С) 10    Д)  $8+3\sqrt{2}$     Е)  $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Реалните числа  $a, b$  и  $c$  са такива, че  $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ . Колко са възможните стойности на  $k$ ?

А) 1    В) 2    С) 3    Д) 4    Е) безброй много

28. Числата 1, 2, 3, ..., 99 са разпределени в  $n$  групи така, че всяко число е в точно една група, във всяка група има поне две числа и ако две числа са в една и съща група, то сборът им не се дели на 3. Намерете най-малкото  $n$ , за което това е възможно.

А) 3    В) 9    С) 33    Д) 34    Е) 66

29. Светла и трите ѝ сестри си купили билети за театър в 4-местна ложа и всяка получила билет със съответен номер. Светла и две от сестрите ѝ отишли по-рано в театъра и седнали на три от четирите места в ложата по случаен начин. Когато се появила четвъртата сестра, тя поискала да седне на своето място. В случай че мястото ѝ е било заето, седящата на него сестра го освобождавала, като отивала на собственото си място. В случай че и това място е било заето, седящата на него сестра също го освобождавала, като и тя отивала на собственото си място, и т.н. Каква е вероятността Светла да се е преместила при идването на четвъртата сестра?

А)  $\frac{3}{4}$     В)  $\frac{1}{2}$     С)  $\frac{1}{3}$     Д)  $\frac{1}{4}$     Е)  $\frac{1}{6}$

30. Редицата от цели числа  $a_n$  е дефинирана чрез равенствата  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$  при  $n \geq 0$ . Намерете остатъка при делението на числото  $a_{2009}$  на 7.

А) 0    В) 1    С) 2    Д) 5    Е) 6