

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

18 март 2006 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

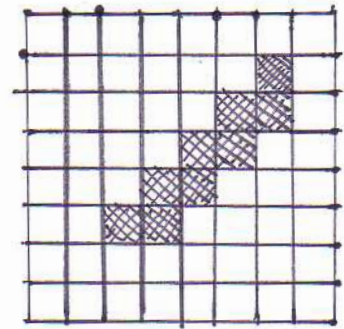
1. Кое е най-голямото число?

- A) 2006×2006 B) 2005×2007 C) 2004×2008 D) 2003×2009 E) 2002×2010

2. На колко нули завършва произведението на първите 2006 прости числа?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 9 E) 26

3. Фигурата вдясно е получена чрез затъмняване на част от единичните квадратчета на квадратната мрежа. Колко още квадратчета могат да се затъмнят така, че да се увеличи лицето, но да не се промени периметърът на затъмнената фигура?



- A) 0 B) 7 C) 18 D) 12 E) 16

E

K

4

7

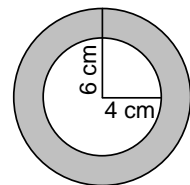
4. Вляво са показани 4 карти. От едната страна на всяка от тях е отбелязана по една буква, а от обратната страна – по едно число. Камен твърди, че ако буквата върху някоя от картите е гласна, то числото върху същата карта е четно. Колко най-малко карти трябва да обърне Момчил, за да е сигурен, че твърдението на Камен е вярно?

- A) нито една B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. Два влака с една и съща дължина се движат в противоположни посоки с постоянни скорости. Скоростта на първия е 100 км/ч., а тази на втория – съответно 120 км/ч. Един пътник във втория влак установил, че при разминаването на двата влака първият минал пред него точно за 6 сек. За колко секунди е преминал вторият влак пред пътник в първия при това разминаване?

- A) 5 B) 6 C) между 6 и 7 D) 7 E) повече от 7

6. Диана има две колиета, които са изработени от един и същ метал. Колиетата са еднакво дебели и имат еднакви тегла. Първото (показано е вдясно) е с формата на пръстен, т.е. получено е с помощта на два концентрични кръга съответно с радиуси 6 cm и 4 cm. Второто колие представлява плътен кръг. Колко сантиметра е радиусът на второто колие?



- A) 4 B) $2\sqrt{5}$ C) 5 D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

7. Дадени са числата a , b , c , d и e така, че разликата между всеки две съседни е постоянна. На колко е равно числото a , ако $b = 5,5$ и $e = 10$?

- A) 0,5 B) 3 C) 4 D) 4,5 E) 5

8. Ако $4^x = 9$ и $9^y = 256$, на колко е равно произведението xy ?

- A) 2006 B) 48 C) 36 D) 10 E) 4

9. Всяко 9-цифрено число, в десетичния запис на което участват всички цифри от 1 до 9, е записано на отделен лист. След това всички листи са сложени в една кутия. Колко листи трябва да се извадят най-малко от кутията, за да е сигурно, че измежду извадените има два, числата върху които са с една и съща първа цифра?

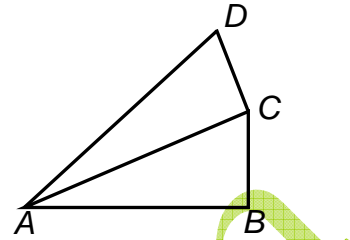
- A) 9! B) 8! C) 72 D) 10 E) 9

10. На чертежа вдясно отсечката AB има дължина 1,

$\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$ и $\angle CAB = \angle DAC = \theta$.

На колко е равна AD ?

- A) $\cos\theta + \operatorname{tg}\theta$ B) $\frac{1}{\cos 2\theta}$ C) $\cos^2\theta$
D) $\cos 2\theta$ E) $\frac{1}{\cos^2\theta}$



11. За коя от посочените функции оста Oy е ос на симетрия за графиката ѝ в правоъгълна координатна система xOy ?

- A) $y = x^2 + x$ B) $y = x^2 \sin x$ C) $y = x \cos x$ D) $y = x \sin x$ E) $y = x^3$

12. На рулетката в казиното има 37 числа: 0 и всички естествени числа от 1 до 36. Каква е вероятността да се падне просто число при едно завъртане на рулетката?

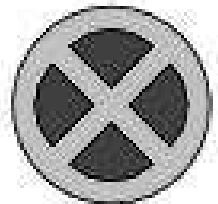
- A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{11}{37}$ C) $\frac{11}{36}$ D) $\frac{12}{37}$ E) $\frac{1}{3}$

13. Даден е триъгълник ABC с ъгъл при върха B равен на $\frac{\pi}{3}$. Дължините на отсечките, свързващи центъра на вписаната окръжност с върховете A и C , са съответно 4 и 6. Да се намери радиусът на вписаната окръжност.

- A) 7 B) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ C) 9 D) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{17}}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

14. Радиусът на пътният знак вдясно е 20 cm. Всяка от четирите по-тъмни части е четвъртинка от един и същ кръг, а сборът от лицата на тези части е равен на лицето на по-светлата част от знака. Колко сантиметра е радиусът на кръга, от който са получени четирите по-тъмни части на пътният знак?

- A) $10\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $\frac{20}{3}$ D) 12,5 cm E) 10 cm

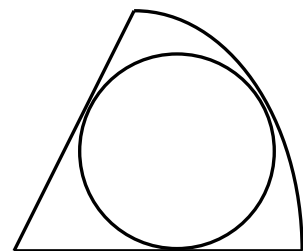


15. Дадени са 3 прости числа a , b и c , които изпълняват условието $a > b > c$. Ако $a + b + c = 78$ и $a - b - c = 40$, на колко е равно произведението abc ?

- A) 438 B) 590 C) 1062 D) 1239 E) 2006

16. Отношението между радиуса на кръговия сектор и радиуса на вписаната в него окръжност е 3 : 1. Колко е отношението на лицата им?

- A) 3:2 B) 4:3 C) 5:3 D) 6:5 E) 5:4



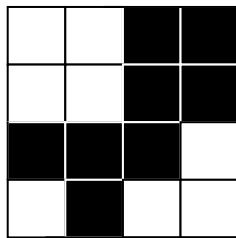
17. В едно първенство по волейбол участвали 16 отбора, като всеки от тях изиграл по един мач с останалите. При победа победителят получавал 1 точка, а победеният – съответно 0 точки. Както е известно, във волейбола няма равни мачове. След приключване на първенството се оказало, че точките на отборите в крайното класиране образуват аритметична прогресия. С колко точки е завършил последният отбор в класирането?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) ситуацията е невъзможна E) число, различно от посочените

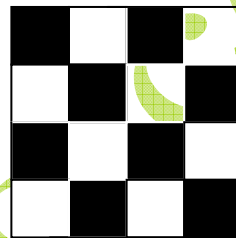
18. Миналата година момчетата в училищния хор са били с 30 повече от момичетата. През тази година броят на хористите е увеличен с 10%, като момичетата са се увеличили с 20%, а момчетата – съответно с 5%. Колко са хористите тази година?

- A) 88 B) 99 C) 110 D) 121 E) 132

19. Част от единичните квадратчета на квадрат 4×4 са оцветени в черно, както е показано на Фиг. 1, а останалите квадратчета са оцветени в бяло. За един ход се разрешава смяна на местата на едно бяло и едно черно квадратче, ако квадратчетата се намират на един ред или на един стълб. С колко хода най-малко може от Фиг. 1 да се получи оцветяването на Фиг. 2?



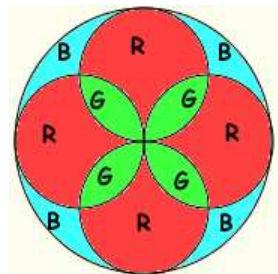
Фиг. 1



Фиг. 2

- A) не е възможно да се получи B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Стъклената витрина вдясно е с формата на кръг, като в него са вписани 4 еднакви по-малки кръга по показания начин. С буквите R , G и B са означени съответните оцветявания в червено, зелено и синьо. Ако е известно, че зелените части на витрината са общо 400 cm^2 , колко квадратни сантиметра са сините части?



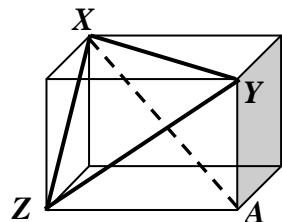
- A) 396 B) 400 C) 120π D) $90\sqrt{2}\pi$ E) 382

21. Ако е известно, че числата a и b са по-големи от 1, коя от дробите е най-голяма?

- A) $\frac{a}{b-1}$ B) $\frac{a}{b+1}$ C) $\frac{2a}{2b+1}$ D) $\frac{2a}{2b-1}$ E) $\frac{3a}{3b+1}$

22. Дължините на страните на $\triangle XYZ$ са 8 cm, 9 cm и $\sqrt{55}$ cm.

На колко сантиметра е равен телесният диагонал XA на правоъгълния паралелепипед вдясно?



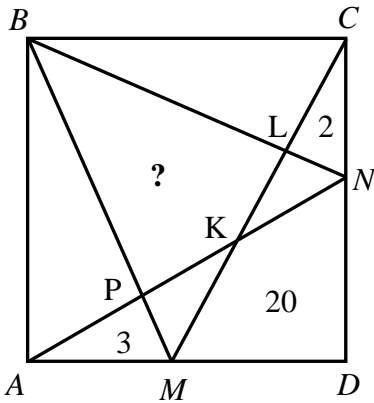
- A) $\sqrt{90}$ B) 10 C) $\sqrt{120}$ D) 11 E) $\sqrt{200}$

23. За колко стойности на реалния параметър b уравнението $x^2 - bx + 80 = 0$ има два различни положителни корена, които са четни числа?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) безброй много

24. Колко са непразните подмножества на множеството $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$, за които сумата на най-малкия и най-големия елемент е равна на 13?

- A) 1024 B) 1175 C) 1365 D) 1785 E) 4095



25. Точките M и N са избрани по произволен начин съответно върху страните AD и DC на правоъгълника $ABCD$. След това правоъгълникът е разделен на няколко части, както е показано на чертежа вляво. На колко е равно лицето на четириъгълника $PKLB$, ако лицето на четириъгълника $MDNK$ е 20, а лицата на триъгълниците AMP и LNC са съответно 3 и 2?

- A) 20 B) 21 C) 25 D) 26
E) информацията е недостатъчна

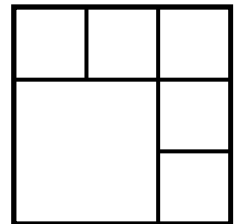
26. Един тест съдържа 10 задачи с два възможни отговора **A**) и **B**). Задачите са подбрани така, че ако един участник в теста постави 5 отговора **A**) и 5 отговора **B**) по произволен начин, винаги броят на верните му отговори ще бъде поне 4. По колко различни начина могат да се подберат задачите в теста, че да е изпълнено това условие?

- A) 5^5 B) 252 C) 2 D) 10 E) 22

27. Калин изтрил едно от написаните на дъската 10 последователни естествени числа. Кое е изтритото число, ако сборът на останалите е 2006?

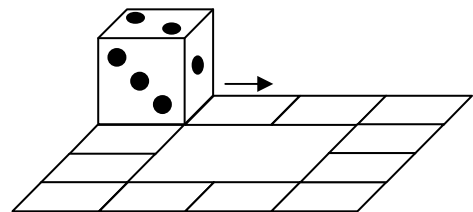
- A) 218 B) 219 C) 220 D) 225 E) 227

28. Във всеки от 6-те квадрата вдясно (5 еднакви, които можем да считаме, че са със страна 1, и един по-голям, който е със страна 2) са поставени числата от 1 до 6 (по едно число във всеки квадрат) така, че разликата на числата в съседните квадрати не е равна на 3. (Квадратите, които имат само общ връх, не се считат за съседни.) По колко различни начина може да се направи това?

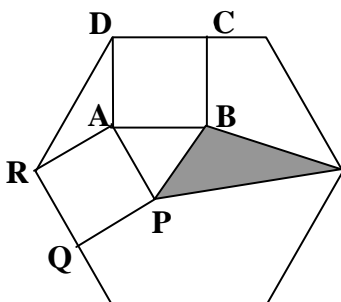


- A) $3 \cdot 2^5$ B) 3^6 C) 6^3 D) $2 \cdot 3^5$ E) $3 \cdot 5^2$

29. Едно зарче е поставено, както е показано вдясно. То се търкаля по пътеката, съставена от 12 квадратчета. След колко обиколки най-малко зарчето ще се върне в първоначалната си позиция и стените му ще бъдат разположени по същия начин?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) не е възможно да се получи



30. Дължината на страната на правилния шестоъгълник вляво е равна на $\sqrt{3}$. Колко е лицето на затъмнената част, ако четириъгълниците $ABCD$ и $APQR$ са еднакви квадрати?

- A) $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$