Международно състезание “Европейско Кенгуру”

20 март 2010 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

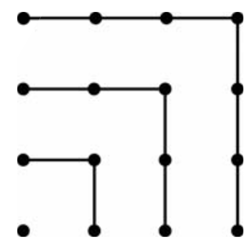
След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Ако сумата на числата във всеки от двата реда е една и съща, кое число трябва да стои вместо звездичката * ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

A) 1010 **B)** 1020 **C)** 1910 **D)** 1990 **E)** 2000

2. От фигурата се вижда, че $1+3+5+7=4\times4$. Намерете стойността на $1+3+5+7+9+11+13+15+17$.



A) 14×14 **B)** 9×9 **C)** $4\times4\times4$ **D)** 16×16 **E)** 4×9

3. Два съда с формата на куб имат лица на една от стените си съответно 1 dm^2 и 4 dm^2. По-големият куб трябва да се напълни с изворна вода, като се използва по-малкият. Колко пъти трябва да се напълни малкият куб с вода от извора?

A) 2 пъти **B)** 4 пъти **C)** 6 пъти **D)** 8 пъти **E)** 16 пъти

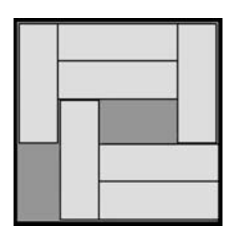
4. Колко четирицифрени числа, записващи се само с нечетни цифри, са кратни на 5?

A) 900 **B)** 625 **C)** 250 **D)** 125 **E)** 100

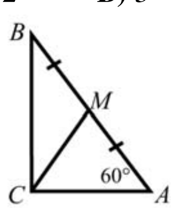
5. Управителят на една фирма казал: „*Всеки от нашите служители е поне на 25 години.*” Оказало се, че неговото твърдение не е вярно. Това означава, че:

A) всички служители във фирмата са точно на 25 години;
B) всички служители във фирмата са поне на 26 години;
C) никой от служителите във фирмата не е навършил 25 години;
D) някой служител във фирмата е на по-малко от 25 години;
E) някой служител във фирмата е точно на 26 години.

6. В показаната кутия са поставени седем еднакви плочки с размери 3×1. С плъзгане без застъпване на някои от плочките във вътрешността на кутията трябва да се освободи място за още една такава плочка. Колко най-малко плочки трябва да се преместят?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** исканото е невъзможно



7. Триъгълникът ABC е правоъгълен, точката M е средата на хипотенузата му AB и $\angle A=60°$. Мярката на $\angle BMC$ е:

A) 105° **B)** 108° **C)** 110° **D)** 120° **E)** 125°

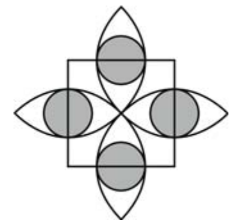
8. Кое от посочените числа може да показва броя на ръбовете на призма?

A) 100 **B)** 200 **C)** 2008 **D)** 2009 **E)** 2010

9. За колко двуцифрени числа $\overline{xy}$ е изпълнено условието $(x-3)^2+(y-2)^2=0$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 32 **E)** нито едно

10. Дължината на страната на квадрата от чертежа е равна на 2, всички полуокръжности минават през центъра му, а техните центрове са върхове на квадрата. Затъмнените кръгове се допират до полуокръжностите и центровете им лежат върху страните на квадрата. Да се намери сумата от лицата на затъмнените кръгове.

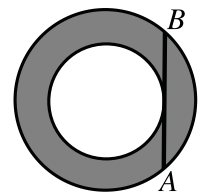


A) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$ **B)** $\sqrt{2}\pi$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ **D)** π **E)** $\frac{1}{4}\pi$

11. Числата $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ в посочения ред са последователни членове на геометрична прогресия. Следващият член на тази прогресия е равен на:

A) $\sqrt[9]{7}$ **B)** $\sqrt[12]{7}$ **C)** $\sqrt[5]{7}$ **D)** $\sqrt[10]{7}$ **E)** 1

12. Хордата AB от чертежа се допира до по-малката от двете концентрични окръжности. Ако $AB=16$, на колко е равно лицето на затъмнената фигура?



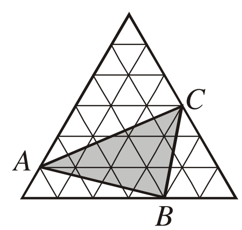
A) 32π **B)** 63π **C)** 64π **D)** $32\pi^2$

E) лицето зависи от радиусите на окръжностите

13. За целите числа x и y е вярно равенството $2x=5y$. Точно едно от посочените числа може да бъде равно на $x+y$. Кое е то?

A) 2011 **B)** 2010 **C)** 2009 **D)** 2008 **E)** 2007

14. Големият равностранен триъгълник е съставен от 36 по-малки равностранни триъгълника, всеки от които е с лице 1 cm^2. Намерете лицето на ΔABC.



A) 11 cm^2 **B)** 12 cm^2 **C)** 13 cm^2 **D)** 14 cm^2 **E)** 15 cm^2

15. В една чанта има топки от три цвята – червен, син и зелен, като от всеки цвят има поне по една топка. Известно е, че както и да се извадят пет топки от чантата, измежду извадените има поне две червени и поне три с един и същи цвят. Колко сини топки има в чантата?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** не е възможно да се определи

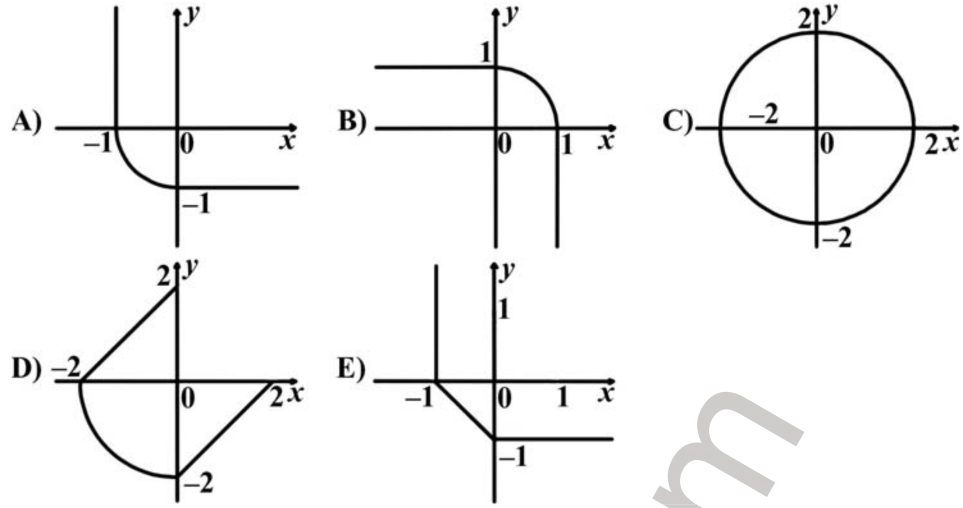
16. Колко правоъгълни триъгълника могат да се получат, като се използват някои три от върховете на правилен 14-ъгълник?

A) 42 **B)** 84 **C)** 88 **D)** 98 **E)** 168

17. Най-малката стойност на израза $\frac{x^3y+xy^3}{x^4+y^4}$, в който x и y са различни от нула реални числа, е:

A) -2 **B)** $-\sqrt{2}$ **C)** -1 **D)** $-\frac{1}{2}$ **E)** $-\frac{1}{3}$

18. Коя от графиките изобразява решенията на уравнението $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2=4$?



19. Ако a и b са рационални числа, за които е вярно равенството $a\sqrt{2}+b+2\sqrt{2}+1=a$, то произведението $a\cdot b$ е равно на:

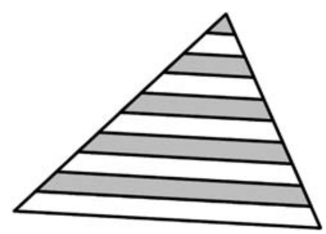
A) 4 **B)** 8 **C)** 6 **D)** -6 **E)** -8

20. Редицата $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ се задава с равенствата $x_1=\sqrt{2},\ \ x_{k+1}=\dfrac{x_k-1}{x_k+1},\ \ k\geq 1$. На колко е

равно x_{2010} ?

A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **B)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}}$ **D)** $\sqrt{2}$ **E)** $2010\sqrt{2}$

21. Прави, успоредни на едната страна на дадения триъгълник, разделят другите му две страни на 10 равни части. Колко процента от лицето на триъгълника е затъмнената част?



A) 42,5% **B)** 45% **C)** 46% **D)** 47,5% **E)** 50%

22. Сто атлети взели участие в надбягване, като никои двама не финиширали с едно и също време. След състезанието всеки участник бил попитан на кое място е завършил и всички отговорили с някакво естествено число между 1 и 100 включително. Сумата на дадените 100 отговора се оказала 4000. Какъв е възможният най-малък брой на неверните отговори?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

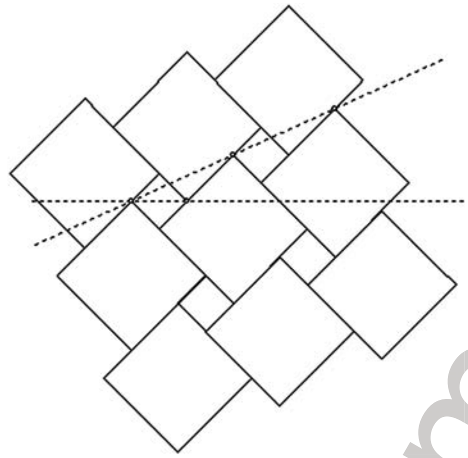
23. Зар се хвърля три пъти. Ако числото, паднало се при третото хвърляне, е равно на сумата от числата, паднали се при първите две хвърляния, каква е вероятността поне при едно ог трите хвърляния да се падне 2?

A) $\dfrac{1}{6}$ **B)** $\dfrac{91}{216}$ **C)** $\dfrac{1}{2}$ **D)** $\dfrac{8}{15}$ **E)** $\dfrac{7}{12}$

24. Показаният баркод е съставен от алтернативно сменящи се черни и бели ивици, като първата и последната са черни. Всяка от ивиците (черна и бяла) е с ширина 1 или 2, а ширината на баркода е равна на 12. Намерете броя на различните баркодове с тези свойства, ако разчитането става винаги отляво надясно.

A) 24 **B)** 132 **C)** 66 **D)** 12 **E)** 116

25. Стена е облепена с квадратни плочки от два вида, както е показано на фигурата. Дължината на страната на по-голямата плочка е a, а тази на по-малката е b. Ако двете прави, отбелязани с пунктирани линии, сключват ъгъл 30°, то отношението $a:b$ е равно на:



A) $\left(2\sqrt{3}\right):1$ **B)** $\left(2+\sqrt{3}\right):1$ **C)** $\left(3+\sqrt{2}\right):1$ **D)** $\left(3\sqrt{2}\right):1$ **E)** 2:1

26. Естествените числа от 1 до 10 включително са записани на черната дъска по 10 пъти всяко. Учениците от един клас играят следната игра: някой ученик изтрива две от числата на дъската и вместо тях записва сумата им, намалена с 1. След това друг ученик изтрива две от числата на дъската и вместо тях записва сумата им, намалена с 1 и т.н. Играта завършва, когато на дъската остане точно едно число. Оставащото на дъската число е:
A) по-малко от 440 **B)** 451 **C)** 460 **D)** 488 **E)** по-голямо от 500

27. Стойността на израза $\dfrac{(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{1024}+3^{1024}\right)\left(2^{2048}+3^{2048}\right)+2^{4096}}{3^{2048}}$ е равна на:

A) 2^{2048} **B)** 2^{4096} **C)** 3^{2048} **D)** 3^{4096} **E)** $3^{2048}+2^{2048}$

28. Квадратният корен $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}_{100}}$ е записан като безкрайна десетична дроб. Коя е стотната цифра след десетичната запетая на тази дроб?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

29. Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко положително реално число x и приема реални стойности. Известно е, че за всяко $x>0$ е вярно равенството $2f(x)+3f\left(\dfrac{2010}{x}\right)=5x$. На колко е равно $f(6)$?
A) 993 **B)** 1 **C)** 2009 **D)** 1013 **E)** 923

30. Катетите на правоъгълен триъгълник имат дължини a и b и върху тях са взети съответно точките Q и P. Нека H и K са петите на перпендикулярите към хипотенузата, спуснати съответно от Q и P. Да се намери най-малката стойност на сумата $KP+PQ+QH$.

A) $a+b$ **B)** $\dfrac{2ab}{a+b}$ **C)** $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **D)** $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **E)** $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$