ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ
ПРЕДВАРИТЕЛЕН ИЗПИТ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
25 април **2009** година
Тема 3

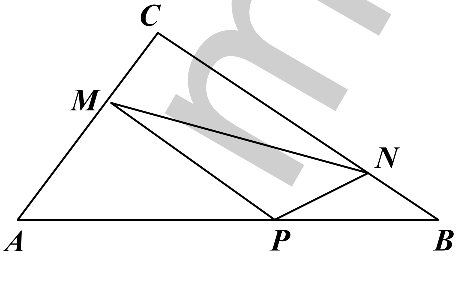
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	а	в	а	б	б	а	в	а	б

11. Уравнението има смисъл при $x \geq 2$. След повдигане на квадрат получаваме еквивалентното уравнение $\sqrt{(x+1)(x-2)} = 5-x$. При $x > 5$ то няма решение, а при $2 \leq x \leq 5$ е равносилно с $(x+1)(x-2) = (5-x)^2$, т. е. с $9x-27=0$, чийто корен е $3 \in [2,5]$. Така изходното уравнение има единствено решение $x = 3$.

12. Неравенството има смисъл при $x \neq -1$ и $\frac{x-1}{x+1} > 0$, откъдето намираме $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.
Последователно получаваме $\log_4 \frac{x-1}{x+1} < \sin\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \log_4 \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4 \frac{x-1}{x+1} < \log_4 (4)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$
$\frac{x-1}{x+1} < (4)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$. Окончателно, решенията на неравенството са $x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$.

13. Двете страни на уравнението се преобразуват по формулата задаваща сбор от два косинуса във вид на произведение; уравнението е равносилно с $2\cos 2x.\cos x = 2\cos 3x.\cos x$. Полученото уравнение представяме във вида $\cos x(\cos 2x - \cos 3x) = 0$. Сега, записвайки във формата на произведение разликата от двата косинуса, намираме $2\cos x.\sin\frac{5x}{2}.\sin\frac{x}{2} = 0$. Решенията на последното уравнение (а следователно и на изходното) се изчерпват от решенията на основните тригонометрични уравнения $\cos x = 0$, $\sin\frac{5x}{2} = 0$ и $\sin\frac{x}{2} = 0$, които са съответно $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2k\pi}{5}$ и $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. В интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ единствените решения от този вид са 0, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{2}$.

14. а) Най – напред определяме дължините на съответните отсечки върху страните на триъгълника ABC, като разбира се отчитаме, че $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Получаваме: $AP = 4$, $PB = 1$, $AM = \frac{3t}{t+1}$, $MC = \frac{3}{t+1}$, $CN = \frac{4t}{t+1}$, $NB = \frac{4}{t+1}$. Търсеното лице на триъгълника MNP е $S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MNC} - S_{\triangle MPA} - S_{\triangle NPB}$. Лицата на посочените триъгълници са както следва:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC.BC}{2} = 6, \qquad S_{\triangle MNC} = \frac{MC.CN}{2} = \frac{6t}{(t+1)^2},$$

$$S_{\triangle MPA} = \frac{1}{2}AM.AP.\sin\measuredangle BAC = \frac{24t}{5(t+1)},$$

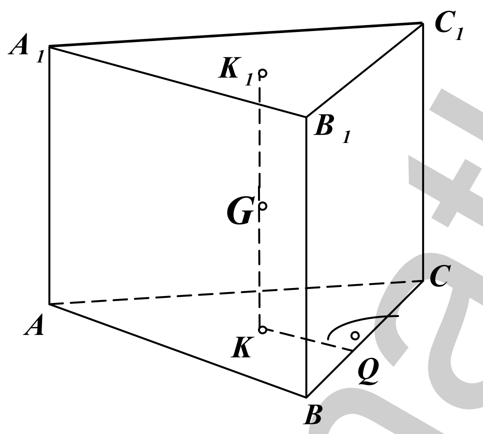
$$S_{\triangle NPB} = \frac{1}{2}PB.NB.\sin\measuredangle ABC = \frac{6}{5(t+1)}$$

(тук сме използвали, че $\sin\measuredangle BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{5}$ и $\sin\measuredangle ABC = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$). След заместване и опростяване намираме лицето $S = \dfrac{6t^2+24}{5(t+1)^2}$.

б) За доказване на неравенствата изследваме функцията $S(t) = \dfrac{6t^2+24}{5(t+1)^2}$ при $t \ge 0$ (да отбележим, че $t=0$ точно когато $M \equiv A$ и $N \equiv C$). Производната на тази функция е $S'(t) = \dfrac{12(t-4)}{5(t+1)^3}$ и очевидно $S'(t) < 0$ при $t \in [0,4)$, а $S'(t) > 0$ при $t \in (4,+\infty)$. Значи $S(t)$ е намаляваща функция в $[0,4)$ и растяща функция в $(4,+\infty)$ и тогава най – малката й стойност в интервала $[0,+\infty)$ е $S(4) = \dfrac{24}{25}$. Така показахме, че $S \ge \dfrac{24}{25}$. По – нататък, тъй като $S(0) = \dfrac{24}{5} > \lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = \dfrac{6}{5}$, то $S(t)$ има и най – голяма стойност в интервала $[0,+\infty)$ и тя е $S(0) = \dfrac{24}{5}$, с което доказахме и неравенството $S \le \dfrac{24}{5}$.

Забележка. Неравенствата от точка б) могат да се докажат и директно, използвайки стойността на S. Действително, след елементарни преобразувания , неравенството $S \le \dfrac{24}{5}$ е равносилно с неравенството $t(3t+8) \ge 0$, което очевидно е изпълнено за всяко $t \ge 0$; неравенството $S \ge \dfrac{24}{25}$ е равносилно с неравенството $(t-4)^2 \ge 0$, което е изпълнено за всяко t.

15. Нека G е центърът на вписаната в призмата сфера и K и K_1 са ортогоналните проекции на G върху основите ABC и $A_1B_1C_1$. Точките K, G и K_1 са върху една права, $KG = GK_1 = r$ и $KK_1 = 2r$ е височина на призмата (тук r е радиусът на сферата). Да означим с Q ортогоналната проекция на K върху BC. Така $KQ \perp BC$ и $KQ \perp BB_1$ (тъй като $BB_1 \perp ABC$ понеже призмата е права), откъдето заключаваме, че $KQ \perp BCC_1B_1$. Освен това $KK_1 \parallel BCC_1B_1$ защото $KK_1 \parallel BB_1$ (KK_1 и BB_1 са перпендикулярни на основата ABC). Това означава, че разстоянието на G до равнината BCC_1B_1 е равно на разстоянието на K до тази равнина, което е KQ. По този начин заключаваме, че $KQ = r$. Аналогично установяваме, че разстоянията от K до AB и до AC са отново равни на r. Следователно K е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, радиусът на която е равен на радиуса r на сферата. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ определяме $BC = 2R\sin\measuredangle BAC = 7$. Сега от косинусовата теорема имаме $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AB.AC.\cos\measuredangle BAC \Leftrightarrow 49 = AC^2 + 25 - 5.AC$, откъдето намираме $AC = 8$. Лицето на триъгълник ABC е $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\measuredangle BAC = 10\sqrt{3}$. От друга страна $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB+BC+AC}{2}.r$ и оттук определяме $r = \sqrt{3}$. За обема на призмата получаваме $V = S_{\triangle ABC}.2r = 60$.



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

ПРЕДВАРИТЕЛЕН ИЗПИТ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
25 април 2009 г

ТЕМА 3
Оценяване на кандидатстудентските писмени работи по математика

<table>
<tr><td rowspan="3">Задача 11
(6 точки)</td><td colspan="2">Определени са допустимите стойности – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Елиминирани са радикалите – 3 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Намерено е решението на уравнението – 2 т.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Задача 12
(6 точки)</td><td colspan="2">Направена е замяната $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определени са допустимите стойности – 2 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Получено е неравенство без логаритъм – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определени са решенията на изходното неравенство – 2 т.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Задача 13
(6 точки)</td><td colspan="2">Уравнението е преобразувано във вид, в който едната му страна е произведение от основни тригонометрични функции, а другата е 0 – 2 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Записани и решени са съответните основни тригонометрични уравнения – 3 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определени са решенията в посочения интервал – 1 т.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Задача 14
(6 точки)</td><td rowspan="3">а)
3 т.</td><td>Определени са дължините на отсечките върху страните на $\triangle ABC$ – 1 т.</td></tr>
<tr><td>Намерени са лицата на триъгълниците PAM, MCN и NBP – 1 т.</td></tr>
<tr><td>Намерено е лицето на триъгълник MNP – 1 т.</td></tr>
<tr><td>б)
3 т.</td><td>Доказани са неравенствата</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Задача 15
(6 точки)</td><td colspan="2">Доказано е, че радиусът на сферата е равен на радиуса на вписаната в основата окръжност – 2 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Намерена е страната BC – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Намерена е страната AC – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определен е радиусът на сферата – 1 т.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Намерен е обемът на пирамидата – 1 т.</td></tr>
</table>