Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика

12 юли 2007г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението $x + \sqrt{x-1} = 7$.

Решение. Дефиниционната област е $x \in [1, \infty)$. Повдигаме на квадрат двете страни на еквивалентното уравнение $\sqrt{x-1} = 7 - x$ и получаваме като следствие квадратното уравнение $x^2 - 15x + 50 = 0$. Двата му корена са $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$, и проверката показва, че само $x_1 = 5$ е решение на даденото уравнение.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AC = 5$, $BC = 4$ и ъглополовяща $CL = \frac{10}{3}$ $(L \in AB)$. Да се намери дължината на страната AB.

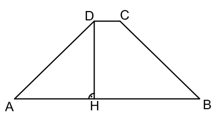
Решение. От свойството на ъглополовящите знаем, че $AL : BL = AC : BC = 5 : 4$. Да означим $AL = 5x$, $BL = 4x$, където $x > 0$, тогава от друго известно свойство на ъглополовящите, $CL^2 = AC.BC - AL.BL$, получаваме $\frac{100}{9} = 20 - 20x^2$. От тук намираме $x = \frac{2}{3}$ и $AB = 9x = 6$.

Задача 3. Да се реши уравнението $4^{x+\frac{1}{2}} - 5.2^x = 3$.

Решение. Полагаме $y = 2^x$, където $y > 0$, тогава даденото уравнение се свежда до квадратното уравнение $2y^2 - 5y - 3 = 0$. От корените му $y_1 = 3$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$ само y_1 е положителен. От $2^x = y_1 = 3$ намираме единственото решение на даденото уравнение $x = \log_2 3$.

Задача 4. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Да се намерят дължините на страните на трапеца, ако периметърът и лицето му са съответно равни на 20 и 15.

Решение. Трапецът $ABCD$ е равнобедрен, тъй като е вписан в окръжност. Понеже в $ABCD$ може да се впише окръжност, имаме $AB+CD = 2AD$, и тъй като периметърът на $ABCD$ е 20, намираме $AB + CD = 10$ и $AD = BC = 5$. Ако h е височината на трапеца, тогава от формулата за лице на трапец $S = \frac{1}{2}(AB + CD).h$ получаваме $15 = 5.h$, $h = 3$. Нека DH е височината на трапеца през върха D ($H \in AB$), тогава от Питагоровата теорема за правоъгълния триъгълник AHD намираме $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{25-9} = 4$. Тъй като $AH = (AB - CD)/2$, имаме $AB - CD = 8$, което заедно с $AB + CD = 10$ ни дава $AB = 9$, $CD = 1$. Окончателно получихме $AB = 9$, $CD = 1$, $AD = BC = 5$.



Задача 5. Да се реши неравенството $\log_x \left(\frac{4x-6}{x-1}\right) < 1$.

Решение. Трябва да са изпълнени условията $x > 0$, $x \neq 1$ и $\frac{4x-6}{x-1} > 0$, откъдето получаваме дефиниционната област $x \in (0,1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$. Даденото неравенство може да се запише във вида $\log_x \left(\frac{4x-6}{x-1}\right) - \log_x x < 0$, или, еквивалентно, $\log_x \left(\frac{4x-6}{x(x-1)}\right) < 0$. Разглеждаме поотделно два случая:

Случай 1: $x \in (0,1)$. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $\frac{4x-6}{x(x-1)} > 1$, а то в този случай е еквивалентно на $x^2 - 5x + 6 > 0$, т.е., $(x-2)(x-3) > 0$. Последното е изпълнено за всяко $x \in (0,1)$.

Случай 2: $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$. При това предположение даденото неравенство е еквивалентно на всяко от неравенствата $\frac{4x-6}{x(x-1)} < 1$ и $(x-2)(x-3) > 0$. Решението на последното неравенство, предвид $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$, е $x \in (\frac{3}{2}, 2) \cup (3, \infty)$. Окончателно, за решението на даденото неравенство получаваме $x \in (0,1) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (3, \infty)$.

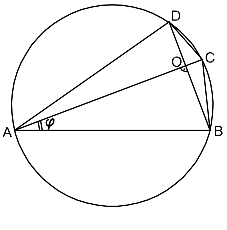
Задача 6. Да се намерят най-малката стойност и най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \sin 3x + 10 \sin x.$$

Решение. Заместваме $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и получаваме $f(x) = 13\sin x - 4\sin^3 x$. Тъй като $\sin x \in [-1,1]$, най-малката и най-голямата стойности на $f(x)$ съвпадат съответно с най-малката и най-голямата стойности на функцията $g(t) = 13t - 4t^3$ в интервала $[-1,1]$. Тъй като $g'(t) = 13 - 12t^2 \geq 13 - 12 > 0$, функцията $g(t)$ е строго монотонно растяща в интервала $[-1,1]$. Поради това $\min f(x) = g(-1) = -9$ и $\max f(x) = g(1) = 9$.

Задача 7. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 7$, $CD = 1$ и взаимно перпендикулярни диагонали AC и BD. Да се намерят дължините на страните AD и BC, така че лицето на четириъгълника да е възможно най-голямо.

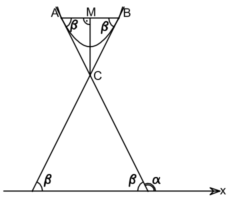
Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD и $\sphericalangle CAB = \varphi$, $0 < \varphi < 90^o$, тогава $\sphericalangle CDB = \varphi$, тъй като се измерва със същата дъга както $\sphericalangle CAB$. От правоъгълните триъгълници ABO и CDO



намираме $AO = AB\cos\varphi = 7\cos\varphi$, $BO = AB\sin\varphi = 7\sin\varphi$, $DO = CD\cos\varphi = \cos\varphi$, $CO = CD\sin\varphi = \sin\varphi$. От тук $AC = 7\cos\varphi + \sin\varphi$, $BD = 7\sin\varphi + \cos\varphi$. Лицето S на четириъгълника $ABCD$ се пресмята по формулата $S = AC.BD/2$, следователно $S = \dfrac{1}{2}(7\cos\varphi + \sin\varphi)(7\sin\varphi + \cos\varphi) = \dfrac{1}{2}(50\sin\varphi\cos\varphi + 7) = \dfrac{1}{2}(25\sin 2\varphi + 7)$. Виждаме, че S ще бъде максимално когато $\sin 2\varphi = 1$, което предвид $0 < \varphi < 90^o$ е изпълнено само при $\varphi = 45^o$. Тогава правоъгълните триъгълници ABO и CDO са равнобедрени, и $AO = BO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $CO = DO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В този случай четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец, и $AD = BC = \sqrt{AO^2 + DO^2} = 5$.

Задача 8. Допирателните към графиката на функцията $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ в точката A с абсциса 0 и в точката B с абсциса 1 се пресичат в точка C. Да се пресметне лицето на триъгълника ABC.

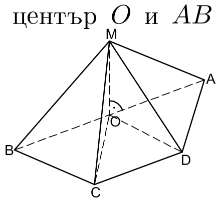
Решение. Точките A и B имат координати $A(0, 3)$ и $B(1, 3)$. Тъй като ординатите им са равни, отсечката AB е



успоредна на абсцисната ос Ox и $AB = 1$. Нека допирателните към графиката на $f(x)$ в A и B сключват с положителната посока на Ox ъгли съответно α и β. От $f'(x) = 4x - 2$ намираме $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = -2$, $\operatorname{tg}\beta = f'(1) = 2$. Тъй като $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$, то $\pi - \alpha = \beta$. От това и от $AB \parallel Ox$ следва, че $\sphericalangle BAC = \beta$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. Така триъгълникът ABC е равнобедрен. Нека M е средата на AB. Тогава $CM \perp AB$ и $CM = AM\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}.2 = 1$. Следователно лицето S на $\triangle ABC$ е $S = \dfrac{1}{2}AB.CM = \dfrac{1}{2}$.

Задача 9. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа $ABCD$ и връх M. Околната стена ABM е перпендикулярна на основата, всички околни стени имат равни лица и всички околни ръбове имат дължина $\sqrt{5}$. Да се пресметне обемът на пирамидата.

Решение. Тъй като $ABM \perp ABCD$, ортогоналната проекция O на върха M върху равнината $ABCD$ лежи на правата AB. Понеже $AM = BM = CM = DM$, около четириъгълника $ABCD$ се описва окръжност с център O и AB е неин диаметър. Да означим $\sphericalangle AMB = \alpha$, $\sphericalangle BMC = \beta$, $\sphericalangle CMD = \gamma$ и $\sphericalangle DMA = \delta$.



От $S_{ABM} = S_{BCM} = S_{CDM} = S_{DAM}$ и $AM = BM = CM = DM$ получаваме $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta$. Ако $\alpha = \beta$, то $\triangle ABM \cong \triangle BCM$ и от тук $BC = BA$, което е невъзможно (през т. B минава само един диаметър). Така $\alpha \neq \beta$ и от $\sin\alpha = \sin\beta$ следва $\beta = 180^o - \alpha$. По същия начин от $\sin\alpha = \sin\gamma$ и $\sin\alpha = \sin\delta$ следва $\gamma = 180^o - \alpha$ и $\delta = 180^o - \alpha$. Значи $\beta = \gamma = \delta$, и тогава $\triangle BCM \cong \triangle CDM \cong \triangle DAM$, откъдето следва $BC = CD = DA$. Сега $\triangle BOC \cong \triangle COD \cong \triangle DOA$ и оттук $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOA = 60^o$, така че тези три триъгълника са равностранни и $AB = 2OB = 2BC$. (Ще отбележим, че $ABCD$ е равнобедрен трапец.)

От $\triangle BCM$ и $\triangle ABM$ по косинусовата теорема имаме

$$BC^2 = 10 - 10\cos\beta \ \text{ и } \ AB^2 = 4BC^2 = 10 - 10\cos(180^o - \beta) = 10 + 10\cos\beta.$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме $5BC^2 = 20$, откъдето $BC = 2$ и $AB = 4$. Пресмятаме $S_{ABCD} = 3S_{BOC} = 3\dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$. От $\triangle AOM$ намираме $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$. За обема V на пирамидата получаваме $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.OM = \sqrt{3}$.

Задача 10. Измежду всички квадратни функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяващи условията $|f(-1)| \leq 1$ и $|f(1)| \leq 1$, да се намерят тези, които имат възможно най-малка дискриминанта.

Решение. Използваме неравенството $(a + c)^2 \geq 4ac$, в което равенството е изпълнено само при $a = c$, и условието $|f(-1)f(1)| \leq 1$, за да получим

$$D = b^2 - 4ac \geq b^2 - (a + c)^2 = (a + b + c)(b - a - c) = -f(1)f(-1) \geq -1.$$

Равенството $D = -1$ е изпълнено точно когато и в двете неравенства на горния ред имаме равенства. Първото от тях става равенство когато $a = c$, а второто когато $f(-1) = f(1) = 1$ или $f(-1) = f(1) = -1$. От тук намираме $b = 0$ и $a = c = 1/2$ или $a = c = -1/2$. Следователно единствените функции, удовлетворяващи условията на задачата, за които $D = -1$, са $f_1(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)$ и $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2 + 1)$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.