

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 13.12.2008 г.

9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

Зад 1. Кое от уравненията има два различни реални корена?

- а) $8x^2 + 8x + 7 = 0$ б) $-9x^2 + 30x - 25 = 0$ в) $14 + 17x - 6x^2 = 0$ г) $5x^2 + 14 = 0$

Зад 2. В равнобедрен трапец бедрото е 6 см, а височината му е 3 см. Ъглите на трапеца са:

- а) $45^\circ, 135^\circ, 30^\circ, 150^\circ$; б) $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$; в) $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$; г) друг отговор.

Зад 3. $\left(\frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^5}$ е равно на:

- а) $\frac{1}{x-2}$ б) $\frac{x}{x-2}$ в) $\frac{x}{x+2}$ г) друг отговор.

Зад 4. Правоъгълник има периметър 36 см. Сборът от лицата на квадратите, построени външно върху страните му е 340 cm^2 . Намерете страните на правоъгълника.

- а) 7 см и 11 см б) 6 см и 12 см в) 8 см и 10 см г) друг отговор.

Зад 5. При какви стойности на параметъра m , уравнението $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ има корени x_1 и x_2 , за които: $x_1^2 + x_2^2 = m + 4$

- а) всяко число б) 5 и 2 в) 1 и 2,5 г) друг отговор.

Зад 6. Триъгълник ABC със страни $AC = 8$ см и $BC = 10$ см е вписан в окръжност, като BC е най-голямата хорда на окръжността. За коя стойност на параметъра a точката с абсциса, равна на радиуса на окръжността, и ордината, равна на дължината на страната AC , е от графиката на функцията $f(x) = 3x + a - 1$:

- а) -4 ; б) -6 ; в) -21 ; г) друг отговор.

Зад 7. В успоредника $ABCD$ страната $AB = 6$ см. Точка P лежи на страната CD и $CP = 4$ см. Ако $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$, то \vec{BP} е равен на:

- а) $\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$; б) $\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$; в) $\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$; г) друг отговор.

Зад 8. Търговец на зеленчуци закупил от производителя домати за 400 лв. Той успял да продаде 80% от доматиите на цена с 0,40 лв. по-висока от изкупната, покрил разходите си от 30 лв. и реализирал печалба от 50 лв. Намерете какво количество домати е закупил търговеца и на каква цена.

- а) 200 кг, 2 лв. б) 400 кг, 1 лв. в) 800 кг, 0,50 лв. г) друг отговор.

Зад 9. Ако x е положителният корен на уравнението $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$, то стойността на израза

$$2 \frac{(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} + 3 \frac{(x - \sqrt{5})(x - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + 5 \frac{(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$$
 е:

- а) 3 б) 2 в) 1 г) друг отговор.

Зад 10. Скоростта на течението на една река е 3 км/ч. От пункт А за пункт В срещу течението на реката тръгнала моторна лодка. По пътя моторът на лодката се повредил и докато го поправяли лодката се носела по течението на реката. Оказало се, че лодката пристигнала в крайния пункт В с 45 минути закъснение. Да се намери колко минути е продължил ремонтът, ако се знае, че времето за изминаване на разстоянието от А до В е 1,25 пъти повече отколкото времето от В до А.

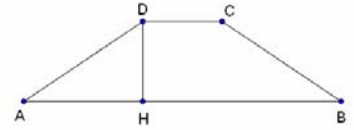
КМС – 13.12.2008 г **Отговори и решения-9 клас**

Отговори: 1-в); 2-г) $30^\circ, 150^\circ, 150^\circ, 30^\circ$; 3-б); 4-а); 5-в); 6-б); 7-в); 8-г) 500 кг, 0,80 лв; 9-б)

Зад 1. В уравнението $14 + 17x - 6x^2 = 0$ коефициентите a и c са с противоположни знаци, следователно дискриминантата му ще е по-голяма от 0, следователно уравнението ще има два различни реални корена.

Зад 2. Триъгълник AHD е правоъгълен с катет $DH = 3$ см и хипотенуза $AD = 6$

см. Следователно $\frac{DH}{AD} = \frac{1}{2}$, откъдето получаваме, че $\angle HAD = 30^\circ$. Ъглите на трапеца са $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$



Зад 3. Преобразуваме $\left(\frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^5} =$

$$= \left(\frac{(x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3)}{x^4(x^2 + 3)} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^2(x+3) - 4(x+3)}{x^5} = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^4} \cdot \frac{x^5}{(x+3)(x^2 - 4)} = \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}$$

Зад 4. Ако означим страните на правоъгълника с a и $b - 2(a + b) = 36$, $a + b = 18$ или $b = 18 - a$. Външно върху страните са построени четири квадрата с лица a^2 , a^2 , b^2 и b^2 , т.е. $2(a^2 + b^2) = 340$. Заместваме $b = 18 - a$ и получаваме $a^2 + (18 - a)^2 = 170$. След решаване на квадратното уравнение за a получаваме 7 см или 11 см, откъдето следва, че b ще е 11 см или 7 см.

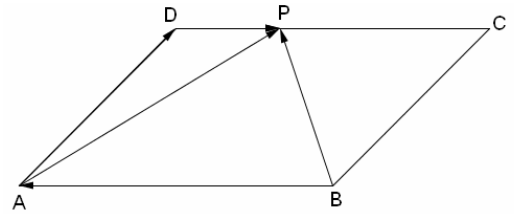
Зад 5. $D = (2m - 3)^2 - 4m^2 + 12m = 9$, следователно уравнението има два различни реални корена. От формулите на Виет получаваме $x_1 + x_2 = 2m - 3$ и $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$. Преобразуваме $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = m + 4$. След заместване получаваме уравнението $2m^2 - 7m + 5 = 0$, което има решение $m_1 = 1$ и $m_2 = 2,5$

Зад 6. BC е диаметър на окръжността, следователно радиуса на окръжността е 5 см, т.е. за $x = 5$ $f(x)$ трябва да е 8. Получаваме, че $3.5 + a - 1 = 8$, $a = -6$

$$\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} = -\vec{a} + \vec{AP} = -\vec{a} + \vec{AD} + \vec{DP} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{6}\vec{DC} =$$

Зад 7.

$$= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} = \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$$



Зад 8. Ако търговецът е закупил x кг домати по y лв. то $x \cdot y = 400$.

Тъй като продал 80% от домоите на цена с 0,40 лв. по-висока от изкупната, покрил си разходите от 30 и реализирал печалба от 50 лв. получаваме уравнението $\frac{80}{100} \cdot x \cdot (y + 0,4) = 480$ След преобразуването му получаваме $x \cdot y + 0,4 \cdot x = 600$. Заместваме $x \cdot y$ с 400 и намираме $x = 500$ кг. Тогава $y = 400 : 500 = 0,80$ лв.

Зад 9. Корените на даденото уравнение са $\sqrt{2}u - 2\sqrt{2}$, следователно при $x = \sqrt{2}$ изразът е равен на 2.

Зад 10. Нека скоростта на лодката е x км/ч. Тогава скоростта на лодката по течението е $(x + 3)$ км/ч, а срещу течението е $(x - 3)$ км/ч. /2 точки/

Ако разстоянието от А до В е s км, то времето за което лодката ще го измине по течението е $\frac{s}{x+3}$ часа, а

времето срещу течението е $\frac{s}{x-3}$ часа. /2 точки/ Тогава $\frac{s}{x-3} = 1,25 \cdot \frac{s}{x+3}$, /3 точки/ откъдето получаваме $x = 27$ км/ч /2 точки/

Нека времето за ремонта е t часа, т.е. лодката ще се върне на разстояние $3t$ км. Времето на закъснение ще е сбор от времето за ремонта t и времето за изминаване на $3t$ км срещу течението със скорост $27 - 3 = 24$ км/ч. /3 точки/ Следователно $t + \frac{3t}{24} = \frac{3}{4}$, откъдето получаваме $t = \frac{2}{3}$. Ремонтът е продължил $\frac{2}{3}$ часа = 40 мин. /3 точки/