<u>Секция "Русе" – СМБ</u>
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 13.12.2008г.
12 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>
<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име..училище.........................град......................

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат.
Задачите се оценяват с по 2 точки:

1 зад. Решенията на неравенството $\frac{3-2x}{3x-2} \geq 2$ са от интервала:

а) $\left[\frac{2}{3};\frac{7}{8}\right]$ б) $\left(\frac{2}{3};\frac{7}{8}\right]$ в) $\left[\frac{7}{8};+\infty\right)$ г) $\left(-\infty;\frac{7}{8}\right]$

2 зад. Числената стойност на израза $\frac{2}{2-x}+\frac{2}{2-y}$ за $x=3+\sqrt{2}$ и $y=3-\sqrt{2}$ е равна на:

а) -8 б) -4 в) 4 г) друг отговор

3 зад. Решенията на уравнението $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$ са:

а) 3 б) 3; $1\frac{3}{4}$ в) $\frac{7}{4}$ г) друг отговор

4 зад. Корените на уравнението $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0{,}2=0$ са:

а) *2; 4* б) *1; 2* в) $\frac{\lg 3}{\lg 5}$ г) друг отговор

5 зад. За системата $\left|\begin{array}{l}\frac{4}{x+3}+\frac{3}{y+1}=3\\ \frac{1}{x+3}-\frac{5}{y+1}=-\frac{7}{6}\end{array}\right.$ стойността на xy е:

а) 2 б) -2 в) $\frac{1}{6}$ г) друг отговор

6 зад. Корените на уравнението $\lg\left(x^2-6x+7\right)-\lg(x-3)=0$ са:

а) 5; 2 б) 2 в) 5 г) друг отговор

7 зад. Ако в правоъгълния триъгълник хипотенузата е с *4 cm* по-голяма от единия катет, а другия катет е с *2 cm* по-малък от хипотенузата, то дължината на по-големия катет е равна на:

а) *10 cm* б) *6 cm* в) *8 cm* г) друг отговор

8 зад. Ако сборът от лицата на два външно допиращи се кръга е $90\pi\, cm^2$, а разстоянието между центровете им е $12\,cm$, то диаметрите на тези кръгове са равни на:

а) $18\,cm$ и $6\,cm$ б) $9\,cm$ и $3\,cm$ в) $10\,cm$ и $14\,cm$ г) друг отговор

9 зад. Ако x_1, x_2 са корени на уравнението $x^2-3x+a=0$, y_1, y_2 са корени на уравнението $y^2-12y+b=0$, (a, b - параметри) и x_1, x_2, y_1, y_2 образуват растяща геометрична прогресия, то a и b са равни на:

а) -288; 4608 б) 2; 32 в) 1; 16 г) друг отговор

10 зад. Ако две страни на един триъгълник са равни съответно на 35 см и 14 см, а ъглополовящата на ъгъла между тях е $\sqrt{330}$ см, то третата страна е равна на

а) 28 см б) 14 см в) 35 см г) друг отговор

11 зад. Броят на трицифрените числа с различни цифри, които могат да се образуват от цифрите 1, 2, 5, 6, 7, 8 е равен на:

а) *80* б) 100 в) *120* г) друг отговор

12 зад. Ако малката основа и височината на равнобедрен трапец имат дължина $\sqrt{3}\,cm$, а острите ъгли на трапеца са по 60^0, то периметърът на трапеца е равен на:

а) *2 cm* б) *3 cm* в) $\sqrt{3}$ *cm* г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише. Задачите се оценяват с по 3 точки:

1 зад. Да се намерят корените на уравнението на уравнението $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Отговор:..

2 зад. Във вътрешността на ъгъл с мярка *60⁰* е взета точка, която се намира на разстояния $\sqrt{7}$ *cm* и $2\sqrt{7}$ *cm* от раменете на ъгъла. Намерете разстоянието от точката до върха на ъгъла.

Отговор:..

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише решението. Задачите се оценяват с по 10 точки:

1 зад. Да се реши уравнението $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

2 зад. Нека x_1, x_2 са корени на уравнението $x^2 + (p+1)x + \frac{1}{2} = 0$, където p е цяло число и $x_1^2 + x_2^2 = k$. Да се намерят всички стойности на параметъра p, за които корените на уравнението $x^2 + 2x + k = 0$ са цели числа.

3 зад. Ако диагоналите на трапец имат дължини съответно 3 cm и 5 cm, а отсечката, съединяваща средите на двете му основи има дължина 2 cm, намерете лицето на трапеца..

Кратки решения и отговори
ПЪРВА ЧАСТ

1зад. Отг. б)
2зад. Отг. в)
3зад. Отг. а)
4зад. Отг. г) 0;
5зад. Отг. б)
6зад. Отг. в)
7зад. Отг. в)
8зад. Отг. а)
9зад. Отг. б)
10зад Отг. а)
11зад. Отг. в)
12зад.Отг. г) $6+2\sqrt{3}$

ВТОРА ЧАСТ

1зад. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

След преобразуване получаваме уравнението $3\cos^2 2x - 7\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(3\cos 2x - 7) = 0$.

Следователно $\cos 2x = \frac{7}{3} > 1$, т.е. това уравнение няма решение и $\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$

2зад. Нека т. О е върхът на ъгъла, т. М е точката от вътрешността, а т. А и т. В са петите на перпендикулярите от т. М до раменете на ъгъла, като $MA = 2\sqrt{7}$, $MB = \sqrt{7}$. Около $OAMN$ може да се опише окръжност, която има диаметър OM. От косинусова теорема за триъгълник AMB намираме $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM\cdot BM\cdot\cos 120^0 = 49$. След. $AB = 7\,cm$. От синусова теорема за същия триъгълник $\frac{AB}{\sin 120^0} = 2R$, от където $OM = 2R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

ТРЕТА ЧАСТ

1зад. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$. Тъй като $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, получаваме $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x} = 10$. След полагането $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = y > 0$ решаваме уравнението $y + \frac{1}{y} = 10$ и получаваме $y_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6} > 0$ След заместване в полагането получаваме $x_{1,2} = \pm 2$

2зад. $x^2 + (p+1)x + \frac{1}{2} = 0$. От формулите на Виет получаваме $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -(p+1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$. Тогава

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (p+1)^2 - 1 = k$, от където $k = p^2 + 2p$. За уравнението $x^2 + 2x + k = 0$ получаваме $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1-k} = -1 \pm \sqrt{1-p^2-2p}$, където $1 - p^2 - 2p \ge 0$, т.е. $p \in \left[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right]$. Тъй като по условие p е цяло число, целите числа в този интервал са $-2; -1; 0$. От тях само за -2 и 0 корените на $x^2 + 2x + k = 0$ са цели числа.

3зад. Нека $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ е трапец, като $AC = 5$; $BD = 3$; $PN = 2$, където P е среда на DC, а N е среда на AB. Построяваме т. $K \in AB$, $CK \parallel DB$. Тогава $S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2}h$, $S_{AKC} = \frac{AB+BK}{2}h$, т.е. $S_{ABCD} = S_{AKC}$. Построяваме $CL \parallel PN$, $L \in AB$. Тогава $CL = PN = 2$. Продължаваме CL до т. M така, че $LM = CL$. $AL = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2}$, т.е. т. L е среда на AK и $S_{CMK} = S_{ACK} = S_{ABCD}$. Тъй като знаем страните на триъгълник CMK (той е правоъгълен), то можем да намерим лицето му. **Отг. 6 кв.cm**