СМБ – Секция "Изток"

Великденско математическо състезание 26. 04. 2009г. - 8 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки, от 6 до 10 с по 5 точки и от 11 до 15 с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име……………………………………………….училище…………………………..град………….............

1зад. Стойността на израза $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{12}\right)\sqrt{3}$ е равна на:

а) 33 б) 24 в) 27 г) друг отговор

2зад. Да се реши уравнението $x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3}$ $(x\neq 0)$.

а) 2 и $\frac{1}{2}$ б) 3 и $\frac{1}{3}$ в) 2 и 3 г) друг отговор

3зад. Върху страната AB на ΔABC е избрана точка M, така че AM:MB=3:5. Да се изрази векторът $\overrightarrow{CM}$ чрез векторите $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

а) $\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$ б) $\frac{5}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{b}$ в) $\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$ г) друг отговор

4зад. Колко корена има уравнението $3x^2-9x+6=\left(x^2-3x+2\right)\left(x-4\right)$?

а) 1 б) 2 в) 3 г) друг отговор

5зад. Триъгълникът ABC с $\angle B=30^\circ$ и $\angle C=70^\circ$ е вписан в окръжност. Намерете ъглите на $\Delta A_1B_1C_1$, чийто върхове са пресечни точки на ъглополовящите на ΔABC с окръжността.

а) $80^\circ, 30^\circ, 70^\circ$ б) $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$ в) $100^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ г) друг отговор

6зад. Да се намери сумата на всички решения на уравнението $\left|x^2-3|x|+1\right|=1$.

а) 1 б) 3 в) 5 г) друг отговор

7зад. Нека P и Q са произволни точки съответно върху основите AB и CD на трапеца ABCD. Ако $S_{\Delta ABQ}=23$ кв.см и $S_{\Delta CDP}=18$ кв.см. намерете лицето на трапеца.

а)46 кв.см б) 41 кв.см. в) 43 кв.см. г) друг отговор

8зад. Колко са двуцифрените числа $\overline{ab}$, за които сумата на числата $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е квадрат на цяло число?

а) 3 б) 5 в) 8 г) друг отговор

9зад. Да се пресметне стойността на израза $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$, ако $\frac{a+b}{a-b}=5$.

а) 2 б) 4 в) 6 г) друг отговор

10зад. В успоредника ABCD точката P е среда на страната AD , a Q е пресечна точка на BP и AC. Ако $S_{APQ}=5$ см, намерете лицето на успоредника ABCD .

а) 20 кв.см б) 30 кв.см. в) 40 кв.см. г) друг отговор

11зад. Да се определят числата a , b и c така, че равенството $\left(x^2-3x+2\right)a+\left(3x-1\right)\left(bx+c\right)=1$ да е изпълнено за всяка стойност на **x.**

а) $\frac{9}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{5}$ б) $\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}$ в) $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{10}$ г) друг отговор

12зад. В четириъгълника MNPQ страните MN и NP са равни, а $\angle MNP=\angle MQP=90^\circ$. Намерете лицето на четириъгълника, ако разстоянието от върха N до страната MQ е равно на 3 см.

а) 6 кв см б) 8 кв см в) 9 кв.см г) друг отговор

13зад. Да се пресметне стойността на дробта $\frac{a+2b}{a-2b}$, ако $6a^2+6b^2=13ab$ и $0<a<b$.

а) -2 б) 3 в) 1 г) друг отговор

14зад. Мерките на ъглите A , B и C на ΔABC се отнасят както 5:3:2. Медианата AD към страната BC пресича ъглополовящата CE в т.F. Какво е съотношението на отсечките AE и FE ?

а) AE>FE б) AE<FE в) AE=2.FE г) друг отговор

15зад. . Да се намери най-малката цяла стойност на m , при която уравнението $x^2+3\left(1-2m\right)x-12m+2=0$ има корени, по-големи от -10.

а) 2 б) -3 в) -1 г) друг отговор

Отговори: 1 в; 2 б; 3 в; 4 в; 5 б; 6 г 0; 7 б ; 8в; 9 г $\frac{6}{7}$; 10 г 60 кв.см.; 11 а; 12 в; 13 а; 14 г AE=FE; 15 в.

Решения: **1 зад.**

$$\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{12}\right)\sqrt{3}=24.2-12\sqrt{6}+12\sqrt{6}-6.3-$$
$$-\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=48-18-3=27$$

2 зад. Уравнението се преобразува в квадратно уравнение $3x^2-10x+3=0$ с решения 3 и $\frac{1}{3}$.

3 зад. $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{3}{8}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{a}$

4 зад. $3x^2-9x+6=\left(x^2-3x+2\right)\left(x-4\right)\Rightarrow 3\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\left(x-4\right)=0 \Rightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left(3-x+4\right)=0$ от $x^2-3x+2=0$ $x_1=2, x_2=1$ от $7-x=0\Rightarrow x_3=7$.

5 зад Всеки ъгъл на $\Delta A_1B_1C_1$ е равен на сбора от половинките на два ъгъла от ΔABC.

6 зад Могат да се намерят корените като се използва понятието абсолютна стойност.Ако вземем предвид обаче, че $\left|\left(-x_0\right)^2-3\left|-x_0\right|+1\right|=\left|x_0{}^2-3\left|x_0\right|+1\right|$ следва, че всички корени на уравнението могат да се разделят на двойки противоположни числа, така че сумата на всички корени е равна на 0.

7 зад. Ако h е височината на трапеца $S_{ABQ}=\frac{AB.h}{2}$ $S_{CDP}=\frac{CD.h}{2}$

$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.h=S_{ABQ}+S_{CDP}=23+18=41$ кв.см

8 зад. . $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11\left(a+b\right)$ $1\le a+b\le 18$ $11\left(a+b\right)$ е квадрат, когато $a+b=1\Rightarrow$ числата са 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 93.

9 зад От $\frac{a+b}{a-b}=5\Rightarrow\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}=5\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$. Тогава $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3}=\frac{b^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}\right)}{b^3\left(\frac{a^3}{b^3}+1\right)}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^3+1}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3+1}=\frac{6}{7}$

10 зад. Ако $O=AC\cap BD$, в ΔABD BP и AO са медиани $\Rightarrow$ точката Q е медицентър в ΔABD и го дели на шест равнолицеви Δ, един от които е $\Delta APQ=6.5=30$ кв.см. $\Rightarrow S_{ABCD}=2.30=60$ кв.см

11 зад. Ако равенството е изпълнено за всяка стойност на х, при $x=0$ $2a-c=0$ (1),при $x=1$ $2\left(b+c\right)=1$ (2) и при $x=2$ $5\left(2b+c\right)=1$ (3). След решаване на системата (1), (2) и (3) получаваме $a=\frac{9}{10}$, $b=-\frac{3}{10}$, $c=\frac{4}{5}$.

12 зад. Ако S е пета на перпендикуляра от N към MQ (NS е разстоянието от върха N до страната MQ), а K е пета на перпендикуляра от N към страната PQ, $K\in PQ$). $\Delta SMN\cong\Delta KPN$ $\left(MN=PN\right)$ $\angle NSM=\angle NKP=90^\circ$ $\angle SNM=\angle KNP$ (взаимно $\perp$ рамене) $\Rightarrow SN=NK$ $\Rightarrow$ $S_{MNPQ}=S_{MQKN}+S_{KNP}=$ $=S_{MQKN}+S_{SMN}=S_{SQKN}=3^2=9$ кв.см.

13 зад. $6a^2+6b^2=13ab\Rightarrow 6a^2+6b^2-9ab-4ab=0\Rightarrow 6a^2-9ab+6b^2-4ab=0\Rightarrow$ $\left(2a-3b\right)\left(3a-2b\right)=0$ **(1)** от $0<a<b\Rightarrow 2a<3b\Rightarrow 2a-3b<0$ **(2),** от (1) и (2) $\Rightarrow 3a-2b=0\Rightarrow 2b=3a$ $\frac{a+2b}{a\_2b}=\frac{a+3a}{a-3a}=\frac{4a}{-2a}=-2$.

14 зад. От $\angle A:\angle B:\angle C=5:3:2\Rightarrow\angle A=90^\circ,\angle B=54^\circ,\angle C=36^\circ$. AD е медиана $\Rightarrow\Delta ADC$ - равнобедрен $\Rightarrow\angle ACD=\angle CAD=36^\circ$ и от ΔABD - равнобедрен $\Rightarrow\angle DAB=\angle ABD=54^\circ$. CE -ъглополовяща на $\angle ACB\Rightarrow\angle ACF=18^\circ\Rightarrow\angle AFE=18^\circ+36^\circ=54^\circ\Rightarrow\angle AFE=\angle FAE\Rightarrow AE=FE$.

15 зад. $x_{1,2}=\frac{-3\left(1-2m\right)\pm\sqrt{9\left(1-2m\right)^2+48m-8}}{2}=\frac{-3+6m\pm\sqrt{\left(6m+1\right)^2}}{2}=\frac{-3+6m\pm\left(6m+1\right)}{2}$ $x_1=6m-1$ $x_2=-2$. Но $-2>-10$ $\Rightarrow 6m-1>-10\Rightarrow 6m>-9\Rightarrow m>-\frac{3}{2}$. Най-малкото цяло решение **е** -1**.**