СМБ - Секция “ИЗТОК”
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 26.04.2009г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех!

Име...училище.........................град......................

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки:

1зад. Броят на различните цели числа, които са решенията на неравенството $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)} \geq 0$, е равен на:

а) 1; б) 2; в) 3; г) друг отговор

2зад. Стойността на израза $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+......+\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}$ е равна на:

а) 1 б) $1-\sqrt{2009}$ в) -1 г) друг отговор

3зад. Ако $A=\frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}$ и $B=\frac{10^{2008}+1}{10^{2009}+1}$, то:

а) $A<B$ б) $A=B$ в) $A>B$ г) не могат да се сравнят

4зад. Решенията на неравенството $\left|x^2-5x\right|<6$ са:

а) $(-1;2)\cup(3;6)$ б) $[-1;6]$ в) $[-3;5]\cup[6;8]$ г) друг отговор

5зад. За системата $\left|\begin{array}{l} x^2y+xy^2=20 \\ x^3+y^3=65 \end{array}\right.$ стойността на xy е:

а) 1 б) 4 в) 3 г) друг отговор

6зад. Ако $x_1<x_2$ са корените на уравнението $\sqrt{\frac{x+2}{3x+1}}+\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}=\frac{5}{2}$, то x_1-x_2 е равно на:

а) $-\frac{5}{11}$ б) $-7\frac{2}{11}$ в) $-6\frac{9}{11}$ г) друг отговор

7зад. Ако в правоъгълен триъгълник медиана с дължина m дели правия ъгъл в отношение 1:2, то лицето на триъгълника е равно на:

а) $2m^2$ б) $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$ в) $m^2\sqrt{3}$ г) друг отговор

8зад. Ако за ΔABC $<BAC=105^0$, $<ABC=45^0$ и височината към BC е равна на 3 см, то дължината на страната AB е равна на:

а) $6\sqrt{2}$ б) $6\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{2}$ г) друг отговор

9зад. В ΔABC точката M е средата на страната AB, точката N е средата на CM, $CP=\frac{2}{5}CA$ ($P\in AC$) и $CQ=\frac{1}{3}CB$ ($Q\in BC$). Ако лицето на ΔCPN е 12 см^2, то лицето на ΔBQN е равно на:

а) *10 cm*^{2} б) *20 cm*^{2} в) *30 cm*^{2} г) друг отговор

10зад. Ако за ΔABC ($CA=CB=1$) AL, BE и CF са ъглополовящи и точките E, F, L и C лежат на една окръжност, то дължината на страната AB е равна на:

а) $0{,}5\left(\sqrt{17}-1\right)$ б) $\sqrt{17}-1$ в) $0{,}5\left(\sqrt{17}+1\right)$ г) друг отговор

11зад. Ако $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ е равна на:

а) $\frac{3}{5}$ б) $-\frac{1}{5}$ в) $-\frac{7}{25}$ г) друг отговор

12зад. Ако $<BAD=60^0$ в успоредника $ABCD$ и окръжността с радиус R, минаваща през върховете A, B и D разполовява страната CD, то лицето на успоредника е равно на:

а) R^2 б) $2R^2\sqrt{3}$ в) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише. Задачите се оценяват с по 3 точки:

13зад. Да се намерят всички цели стойности на параметъра k, за които уравнението $\frac{1}{2}kx^2 - 10x + 2k = 0$ има за корен естествено число.

Отговор: …………………….

14зад. Решете уравнението $3\log_8(x+1) = 8 + 3\log_{x+1} 8$

Отговор: ………………………..

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки:

15зад. а) Дадено е, че $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} = k$. Да се намерят стойностите на k, за които $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = 0$.

б) Да се реши уравнението $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = 7\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)$

16зад. Ъглите α, β, χ на ΔABC, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $\cos\alpha + tg\beta + \sin\chi = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$.

17зад. В ΔABC точка M е среда на страната AB, точките P и Q лежат на страната BC и са такива, че $BP = PQ = QC$ и $\angle PMQ = \angle AMQ + \angle BMP$.

а) Да се докаже, че $BC = 3AC$

б) Ако четириъгълникът $AMQC$ е вписан в окръжност, да се намери отношението $\frac{MP}{MQ}$.

ВМС 26 04 2009 г 12 клас Отговори и кратки решения

Първа част:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.
б	г $\sqrt{2009}-1$	в	а	б	в	б	в	б	а	в	г $R^2\sqrt{3}$

Втора част:

13зад. Ако $k=0$, то $x=0$, но то не е естествено число. Нека $k\neq 0$. Тогава $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-4k^2}}{k}$ за $k\in[-5;0)\cup(0;5]$ (тогава D е неотрицателна).След непосредствена проверка се получава, че при $k=5,\ x=2;\ \ k=4,\ x_1=1,\ x_2=4;\ \ k=3,\ x=6$ **Отговор: 3; 4; 5**

14зад. ДС: $x\neq 0;\ x>-1$. След полагане $y=\log_8(x+1)$ получаваме уравнението $3y^2-8y-3=0$, което има корени $y_1=-\dfrac{1}{3};\ y_2=3$. След решаване на двете основни логаритмични уравнения получаваме

$x_1=-\dfrac{1}{2};\ x_2=511$ **Отговор:** $x_1=-\dfrac{1}{2};\ x_2=511$

Трета част:

15зад. а) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)^2=0$, тогава $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}-3=0$, от където $k=3$

б) Полагаме $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=y$, при $x\neq 0$. Повдигаме двете страни на квадрат и след няколко преобразования получаваме $y^2+3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{18}{x^2}\right)$, след което стигаме до уравнението $2y^2-7y+6=0$, за което $y_1=\dfrac{3}{2};\ y_2=2$. При $y=\dfrac{3}{2}$ корените на даденото уравнение са $\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}$, а при $y=2$ са $2\pm\sqrt{10}$

16зад. От това, че $\alpha,\ \beta,\ \chi$ образуват аритметична прогресия следва, че

$\beta=\dfrac{\alpha+\chi}{2}=\dfrac{180^0-\beta}{2}\ \Rightarrow\ \beta=60^0$. Тогава $\alpha=60^0-x$, а $\chi=60^0+x$. Получаваме

$\cos(60^0-x)+tg60^0+\sin(60^0+x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1;\ 2\sin(x+45^0)\cos15^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\cos15^0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);\quad \sin(x+45^0)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)=\sin75^0;\quad x+45^0=75^0;$

$x=30^0;\ \ \alpha=30^0;\ \ \chi=90^0.$

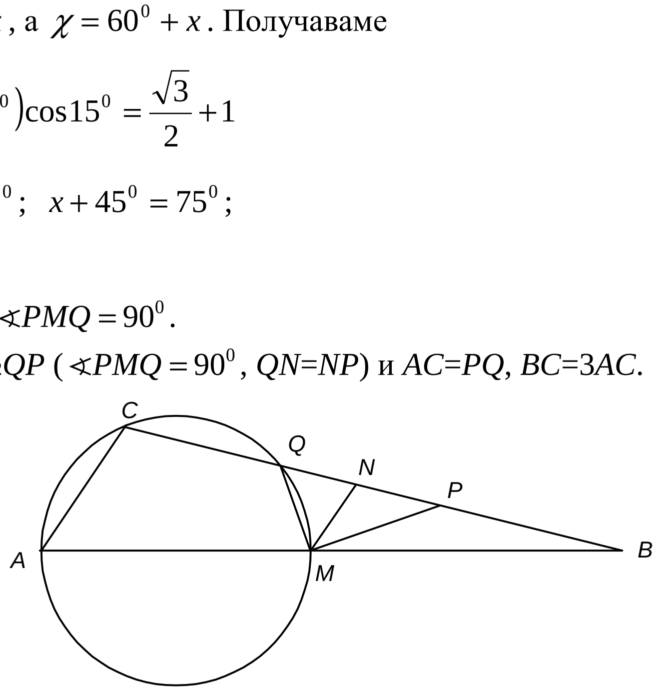
17зад. а) Тъй като $\sphericalangle PMQ+\sphericalangle AMQ+\sphericalangle BMP=180^0$, то $\sphericalangle PMQ=90^0$.

Нека $CN=NB$. Тогава $MN\|AC$, $MN=½AC$. Но $MN=½QP$ ($\sphericalangle PMQ=90^0$, $QN=NP$) и $AC=PQ$, $BC=3AC$.

б) Понеже $AMQC$ е висан в окръжност, то $\sphericalangle CAM=\sphericalangle MQP=\sphericalangle QMN=\alpha$.

Тогава $<MNB=2\alpha$ (външен за ΔMNQ). Тъй като MN е средна отсечка в ΔABC, то $MNIIAC$. След. $<ACB=2\alpha$.

Означаваме $<ABC=\beta\Rightarrow\beta=180^0-3\alpha$. От $BC=3AC$ и синусовата теорема за ΔABC намираме, че $\sin\alpha=3\sin\beta$, т.е.



$\sin\alpha=3\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)$, от където $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{3}$. Тогава $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. От правоъгълния триъгълник MPQ получаваме $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
26 АПРИЛ 2009г.

Трите имена …………………………………………………………………

Училище ………………………………………………………… клас 12

Град (село)…………………………………………………

Общ брой точки от Първа част: ………………..

Общ брой точки от Втора част: ……………………

Общ брой точки от Трета част: ……………………

Краен брой точки: …………

ПЪРВА ЧАСТ:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.

ВТОРА ЧАСТ:

13зад. Отговор: ……………………..

14зад. Отговор: ……………………..

ТРЕТА ЧАСТ: