СМБ – Секция”ИЗТОК”

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.04.2008

9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор, “Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат, 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки, от 6 до 10 - с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име…………………………………………………..училище…………………..……..град…………………………...

1зад. Равнобедрен трапец с бедро 12 см има ъгъл при основата 120°. Намерете на колко е равно разстоянието между средите на диагоналите му?

а) 10 б) 8 в) 6 г) друг отговор

2зад. Кои две числа имат сбор 20 , а сумата от квадратите им е 272 ?

а) 11 и 9 б) 12 и 8 в) 1 и 11 г) друг отговор

3зад. Даден е ΔABC $(\angle C = 90^\circ)$ със страни AB =10 см и BC = 6 см. На колко е равно лицето на ΔABN , където BN е ъглополовяща на $\angle ABC$?

а) $20см^2$ б) $15см^2$ в) $9см^2$ г) друг отговор

4зад. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $3x^2 - 1 = 5x$, то стойността на израза $B = x_1(1 - x_1) - x_2(x_2 - 1)$ е: а) $-\frac{16}{9}$ б) $\frac{16}{9}$ в) $\frac{25}{3}$ г) друг отговор

5зад. Решенията на системата $\begin{vmatrix} x + xy = 3 \\ xy^2 + xy^3 = 12 \end{vmatrix}$ са :

а) $(-4,2)$ *и* $(4,-2)$ б) $(1,2)$ *и* $(-3,-2)$ в) $(1,-2)$ *и* $(-2,3)$ г) друг отговор

6зад. Мими е боядисвала яйца за Великден. Броят на чисто червените яйца бил равен на корен квадратен от половината от всичките яйца, броят на едноцветните (не червени) яйца бил $\frac{8}{9}$ от всичките яйца, 1 яйце боядисала на точки и 1 - на звездички. Колко са били всичките яйца?

а) 72 б) 45 в) 36 г) друг отговор

7зад. Решенията на уравнението $2|1 + 2x| - |2 - x| = 5$ са :

а) -3 и $\frac{1}{3}$ б) -3, 2 и $\frac{1}{3}$ в) -2 и 3 г) друг отговор

8зад. Колко пъти минутната стрелка и часовата стрелка образуват прав ъгъл в едно денонощие ?

а) 72 б) 44 в) 24 г) друг отговор

9зад. Определете броя на решенията на уравнението $|x^2 - 5|.\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$:

а) 1 б) 2 в) 3 г) друг отговор

10зад. Стойността на израза $A = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1} - a}$ при $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ е :

а) 2 б) $-\frac{1}{2}$ в) $\sqrt{2}$ г) друг отговор

11зад. В равнобедрен правоъгълен ΔABC (*AC*=*BC*) е построена медианата *AM*, продължението на която пресича описаната около ΔABC окръжност в точка *D*. Ако *BD*=5см то дължината на *AD* е:

а) 10 см б) 15см в) 20см г) друг отговор

12зад. През точка *M*, външна за окръжността $k\left(O; \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$ е прекарана секателна *MAB*, като *AB*=5см и $\angle OMA = 45^\circ$.

Дължината на допирателната от *M* към *k* е равна на?

а) 15см б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ в) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ г) друг отговор

13зад. Решенията на уравнението $x^2 - 2x + 4 - 3\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = -1$ са:

а) $3 \pm \sqrt{10}$ б) $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{12}$ в) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{11}$ г) друг отговор

14зад. Даден е ΔABC с лице $12см^2$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Ако *CH* и *BP* са височини, то лицето на ΔAHP е равно на:

а) 3 б) 4 в) 6 г) друг отговор

15зад. При продажба в понеделник в един голям магазин на Великденски зайци, струващи съответно по 17 и 12 лв. единия, оборотът в края на деня от тях бил 478 лв., като от всеки вид били продадени по повече от 10 заека. По колко заека са продадени от всеки вид?

а) 18 и 16 б) 15 и 18 в) 12 и 22 г) друг отговор

Отговори:

1 – в) ; 2 - г) 16 и 4 ;3 - б) ;4 – а) ; 5 – б) ; 6 - а); 7 – г) -3 и 1 ; 8 - б) ; 9 – в) ; 10 – б) ;11 - б) ; 12 – в) ; 13 –в) ; 14 – а) ; 15 – г) 14 и 20

Решения:

1зад. Построяваме височините DH и CM. От $\angle D = 120° \Rightarrow \angle A = 60°$ и $\Delta AHD \cong \Delta BMC$ са правоъгълни с $\angle 30°$.

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AD$ =6см. $AH = \frac{AB - CD}{2}$ и ако P и Q са средите на диагоналите, то $PQ = \frac{AB - CD}{2}$ $\Rightarrow PQ = AH = 6см.$

2зад. Ако първото число е x, а второто е 20- x , то $\Rightarrow x^2 + (20 - x)^2 = 272$ с корени $x_1 = 16$ и $x_2 = 4$.

3зад. От ΔABC правоъгълен, $\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$, $\Rightarrow BC = 8$ см. Ако $CN = x$ то $AN = 8 - x$ и от свойството на ъглополовящата $\Rightarrow \frac{x}{8-x} = \frac{6}{10}$ $\Rightarrow$x=3. $\Rightarrow$ $S_{ABN} = \frac{AN.BC}{2} = \frac{(8-3).6}{2} = 15\ см^2$.

4зад. $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1.x_2 = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow B = x_1 - x_1{}^2 - x_2{}^2 + x_2 = (x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = -\frac{16}{9}$.

5зад. Системата добива вида $\begin{vmatrix} x + xy = 3 \\ y^2(x + xy) = 12 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y_{1/2} = \pm 2$ $\Rightarrow x_1 = 1; y_1 = 2; x_2 = -3; y_2 = -2$.

6зад. Ако броят на всичките яйца е x, то червените яйца са $\sqrt{\frac{x}{2}}$, едноцветните са $\frac{8}{9}.x$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}.x + 1 + 1 = x$

Корените на уравнението са , като $x_1 = 72$, $x_2 = \frac{18}{4}$ не е решение, защото не е цяло число, $\Rightarrow$ $x_1 = 72$ е решение.

7зад. I сл.ако $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $-2.(1 + 2x) - 2 + x = 5$ $\Rightarrow x_1 = -3$ е решение;

II сл.ако $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ $\Rightarrow$ $2.(1 + 2x) - 2 + x = 5$ $\Rightarrow$ $x_2 = 1$ е решение;

III сл.ако $x \in (2; +\infty)$ $\Rightarrow 2.(1 + 2x) + 2 - x = 5$ $\Rightarrow$ $x_3 = \frac{1}{3}$ не е решение.

8зад. Тъй като за 1 час часовата стрелка описва $\angle 30°$, то за 1 мин. – $\angle 0{,}5°$, а минутната стрелка за 1 минута описва $\angle 6°$. $\Rightarrow x.(6° - 0{,}5°) = 90°$ $\Rightarrow x = 16\frac{4}{11}$. Първоначално двете стрелки са били в 12 часа, то за първи път образуват прав ъгъл след $16\frac{4}{11}$ минути $\Rightarrow n.16\frac{4}{11} = 24.60 \Rightarrow n = 88$, но така се броят и всички изправени ъгли, $\Rightarrow n = 44$ пъти двете стрелки образуват прав ъгъл.

9зад. Допустимите стойности са $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $\Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.От уравнението $\left|x^2 - 5\right| = 0 \Rightarrow$ корените са $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$, но $x_2 \notin$ ДС $\Rightarrow$ уравнението има 3 корена.

10зад. $A = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1} - a} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}.\left(\sqrt{a^2 - 1} + a\right)}{\left(\sqrt{a^2 - 1} - a\right)\left(\sqrt{a^2 - 1} + a\right)} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}.\left(\sqrt{a^2 - 1} + a\right)}{a^2 - 1 - a^2} = -a^2 + 1 - a.\sqrt{a^2 - 1}$;

$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2.\sqrt{2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{4}; \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$

11зад. Ако MH $\perp$ AB, то ΔABD е правоъгълен(от $D \in k$ - описана около ΔABC с център средата на AB). $\Rightarrow \Delta ABD \approx \Delta AMH$ по I признак. $\Rightarrow \frac{BD}{MH} = \frac{AD}{AH} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{MH}{AH}$.Ако т.O е средата на AB, то $MH \| CO$

$\Rightarrow$ т.H е среда OB $\Rightarrow$

$MH = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}R$ и $AH = AO + \frac{1}{2}OB = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 5.3 = 15$ см.

12зад. ПострояvamеOH $\perp$ AB $\Rightarrow AH = BH = \frac{5}{2}$.

$\Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4} - \frac{25}{4}} = 5$ Тъй като по условие $\angle OMA = 45°$, то ΔOHM е равнобедрен и правоъгълен. $\Rightarrow HM = OH = 5$ $\Rightarrow MA = MH - AH = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow MB = MH + BH = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$. Ако T е допирната точка с к, то $MT^2 = MA.MB = \frac{5}{2}.\frac{15}{2} = \frac{75}{4}$, $MT = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

13зад. От $x^2 - 2x + 4 - 3\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = -1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 8 - 6\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = -2$; $\Rightarrow 2x^2 - 4x + 5 + 3 - 6\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = -2$. Полагаме $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = t$ $\Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$ $\Rightarrow t_1 = 5$ и $t_2 = 1$. Корените на уравнението $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = 5$ са $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{11}$, а уравнението $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = 1$ няма решение.

14зад. $\Delta AHC \approx \Delta APB$ поI признак $\Rightarrow \frac{AH}{AP} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \Delta AHP \approx \Delta ACB$; ΔAHC е правоъгълен с $\angle AHC = 30°$ $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$ $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} = k$ коефициента на подобие. $\Rightarrow \frac{S_{AHP}}{S_{ACB}} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AHP} = \frac{1}{4}S_{ACB} = 3$.

15зад. Нека x е броят на първият вид зайци, а y е броят на вторият вид зайци, то $17x + 12y = 478$, $x, y \in N$ $\Rightarrow y = 39 - x + \frac{5(2-x)}{12}$ $\Rightarrow 2 - x$ трябва да дели 12. $\Rightarrow 2 - x = 12t$ $\Rightarrow x = 2 - 12t$ и като заместим в ъравнението се получава y=37+17t. Поради условието x>10 и y>10 $\Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow x = 14$ и y = 20 заека.

Автори на темата : Нели и Николай Сиракови - Ботевград