СМБ – Секция"ИЗТОК"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12. 04. 2008

8 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор . "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат . 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности : от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки ; от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име……………………………………………………..училище…………………………….…..град………..........................

1зад. Две числа a и b имат равни сума, произведение и частно. По-малкото от тях е равно на:

а) -2 б) 0,5 в) –1 г) друг отговор

2зад. Диагоналите на ромба $ABCD$ се пресичат в т.O, като $AB=2.OB$. Намерете острия ъгъл на ромба

а) $45°$ б) $60°$ в) $75°$ г) друг отговор

3зад. Сумата от квадратите на три последователни естествени числа никога не е кратна на:

а) 2 б) 3 в) 5 г) друг отговор

4зад. Сборът от катетите на провоъгълен триъгълник е равен на 21 см. Да се намери хипотенузата му, ако радиусът на вписаната в него окръжност е равен на 3 см.

а) 24 см б) 18 см в) 15 см г) друг отговор

5зад. Асен, Борис, Веско и Георги участвали в маратон и един от тях се класирал първи. Те се пошегували с приятелите си, като казали: Асен: Първо място зае Борис; Борис:Първо място зае Георги; Веско: Аз не бях първи; Георги: Аз не съм първи. Кой е класиран първи, ако знаем, че само един е казал истината?

а) Веско б) Асен в) Борис г) друг отговор

6зад. Да се намери броят на всички четирицифрени числа, за които при премахването на първата цифра на всяко от тях се получава число, девет пъти по-малко от първоначалното.

а) 4 б) 7 в) 9 г) друг отговор

7зад. Върху страната AB на ΔABC е избрана такава точка D , че BD=AC. През средите на отсечките AD и BC е прекарана права m . Да се намери мярката на ъгъла, заключен между правите m и AB , ако $\angle BAC = 60°$.

а) $20°$ б) $30°$ в) $40°$ г) друг отговор

8зад. В триъгълника ABC средите M, N и P съответно на страните му AB, BC и AC и върхът C лежат на една окръжност. Ако AB=12 см, да се намери диаметърът на окръжността.

а) 3 см б) 6 см в) 2 см г) друг отговор

9зад.Даден е равностранен ΔABC. Точката M е такава, че $MB=AB$, $\angle AMC = 30°, \angle BMA = 40°, \angle ABM > 90°$ и лежи в полуравнината, определена от AB и несъдържаща т. C. Да се намери мярката на $\angle MBC$.

а) $160°$ б) $120°$ в) $80°$ г) друг отговор

10зад. Ако е изпълнено условието $3n - 2 = n^2$,то изразът $n^3 - 1$ е равен на:

а) 7 б) - 7 в) 1 и 2 г) друг отговор

11зад.Колко корена има уравнението $f(2x) - \dfrac{1}{f(2x)} = 0$, където $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

а) 2 б) 3 в) 4 г) друг отговор

12зад.Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, $E \in AB, F \in BC, G \in CD, H \in AD$, $M = EG \cap HF$

$AE : BE = 2 : 3$ $BF : FC = 3 : 2$ $CG : GD = 2 : 3$, $DH : HA = 3 : 2$, $S_{AEMH} + S_{MFCG} = 10$ кв.см . Намерете лицето на $ABCD$.

а) 15 кв см б) 20 кв см в) 25 кв.см г) друг отговор

13зад. Да се намери стойността на израза $A = a^4 + \dfrac{1}{a^4}$, ако е известно, че $a + \dfrac{1}{a} = 3$

а) 12 б) 31 в) 45 г) друг отговор

14зад. Даден е успоредникът $ABCD$ със среди на страните AB, BC, CD, DA **с**ъответно P, Q, R, S. Нека $K = CP \cap DQ$, $L = AR \cap DQ$, $M = AR \cap BS$, $N = CP \cap BS$ и $AB \in \vec{a}$, $AD \in \vec{b}$. Да се изрази чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектора $\overrightarrow{MK}$

а) $\dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}$ б) $\dfrac{3}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{5}\vec{b}$ в) $\dfrac{1}{5}\vec{a} - \dfrac{2}{5}\vec{b}$ г) друг отговор

15зад. Цифрите на единиците на две естествени числа са 2 и 5. Сборът им е равен на 1117. Ако разменим цифрите на единиците на тези числа, ще се получат нови две числа, чиято разлика е равна на 953.Кое е по-голямото от първоначалните числа.

а) 1112 б) 1032 в) 985 г) друг отговор

Отговори: 1 в; 2 б; 3 б;4 г: 21; 5 а; 6 б;7 б ; 8 б; 9 а; 10 г: 7 и 0;11 в; 12 в; 13 г: 47; 14 б; 15 б

Решения: **1 зад**. $ab = \frac{a}{b} = a + b \quad ab = a + b \Rightarrow a = \frac{b}{b-1} \quad ab = \frac{a}{b} \Rightarrow \quad ab^2 - a = 0 \Rightarrow a(b-1)(b+1) = 0$, откъдето $a = 0{,}5 \quad b = -1$

2 зад. В триъгълника AOB (правоъгълен) $\angle OAB = 30° \Rightarrow \angle A = 60°$.

3 зад Ако n е нечетно число изразът се дели на 2; ако n=5 изразът се дели на 5; изразът $3n^2 + 6n = 3(n^2 + 2n)$ се дели винаги на 3, а 5 не се дели на 3.

4 зад. Ако **a** и **b** са катетите на триъгълника, **c** - хипотенузата, а **r** - радиуса на вписаната окръжност, лесно се намира c = a + b – 2r = 21 – 2.3 = 15 см

5 зад.Отговорите на Борис и Георги са противоречиви, следователно единият не е верен, а другият е верен. Оттук следва, че твърденията на другите двама не са истина. В частност твърдението на Веско не е вярно, следователно той(Веско) се е класирал първи.

6 зад Ако първата цифра е **x**, за всяко число 1000 x + y = 9 y или y = 125 x. У е трицифрено число, което може да се получи при x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, т.е. числата са седем.

7 зад. Ако N и K са средите съответно на BC и AD и. Върху продължението на AB построяваме точка E , така че AE=AC. Тогава KN е средна отсечка в ΔECB, откъдето $KN \parallel EC$. $\angle BAC$ е външен за равнобедрения триъгълник AEC и $\angle CEA = \angle(m, AB) = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$.

8 зад. Отсечките PM и NM са средни отсечки в Δ ABC и следователно $PM \parallel BC, NM \parallel CA$.Тогава $\angle ACB$ и $\angle MPC$ са прилежащи. Дъгите CPM и CNM са равни на $180°$, CM е диаметър и $CM = \frac{1}{4}AB = 3$ см.

9 зад. Точка $M \in k(B; AB)$ $\angle AMC = 30°, \angle BMA = 40°, \angle ABM > 90°$ ΔABM - равнобедрен(AB=BM) $\angle BAM = \angle BMA = 40° \Rightarrow \angle ABM = 180° - (40° + 40°) = 100° \Rightarrow \angle ABC = 60° \Rightarrow \angle MBC = 160°$.

10 зад $3n - 2 = n^2 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 0$ корените на уравнението са $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$ и за тях $n_1^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$ и $n_2^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0$

11 зад. При $x \geq 0 \quad 2x - 1 - \frac{1}{2x-1} = 0 \quad x \neq \frac{1}{2}$ решението е $x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

При $x < 0 \quad 2x + 2 - \frac{1}{2x+2} = 0 \quad x \neq -1$ решението е $x_3 = -\frac{1}{2} \quad x_4 = -\frac{3}{2}$

12 зад. Като се имат предвид съотношенията между отсечките, въвеждаме означенията:
$S_{AME} = 2a \Rightarrow S_{BME} = 3a \Rightarrow \quad S_{AME} = 2a$, $S_{AMH} = 2b \Rightarrow S_{HMD} = 3b$, $S_{MCG} = 2c \Rightarrow S_{DMG} = 3c$, $S_{MCF} = 2d \Rightarrow S_{MFB} = 3d$. $S_{AEMH} + S_{MFCG} = 2a + 2b + 2c + 2d = 2(a + b + c + d) = 10$ кв см $\Rightarrow$ $a + b + c + d = 5$ кв см

Според въведените означения $S_{ABCD} = 5a + 5b + 5c + 5d = 5(a + b + c + d) = 5.5 = 25$ кв см

13 зад. $A = a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = \left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right]^2 - 2$ при $a + \frac{1}{a} = 3$ A=47

14 зад. От еднаквостта на триъгълниците ABS, CDQ, PBC, RDA непосредствено следва, че KLMN е успоредник с диагонал MK и NL . Освен това SM, QK, PN, RL са средни отсечки в триъгълниците DLA, BPC, AMB, CKD , следователно AM=ML=NK=CK=2LR=2NP и BN=NM=KL=LD=2SM=2KQ.

След преобразования намираме $ML = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$, $MN = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} \Rightarrow MK = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$

15 зад. Ако представим числата във вида $\overline{x2}$ =10x + 2 и $\overline{y5}$ =10y + 5 , то

10x + 2 + 10y + 5 = 1117
10x + 5 – 10y –2 = 953 x = 103 y = 8 числата са 1032 и 85.

Ако 10x + 2 + 10y + 5 = 1117
10y + 2 – 10x –5 = 953
тази система има дробни решения.