<u>Секция "Изток" – СМБ</u>
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.04.2008г.
12 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>
<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име...училище................................град................................

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат.
Задачите се оценяват с по 2 точки:

1 зад. Решенията на неравенството $\frac{4}{x+2} \geq 3-x$ са от интервала:

а) $(-2;-1] \cup [2;+\infty)$ б) $(-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$ в) $[-1;2]$ г) друг отговор

2 зад. Стойността на израза $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}}$ е равна на:

а) $\frac{12-\sqrt{2}}{2}$ б) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ в) $\frac{12-3\sqrt{2}}{2}$ г) друг отговор

3 зад. Ако $A = log_5 \frac{1}{3}$ и $B = log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, то:

а) $A < B$ б) $A = B$ в) $A > B$ г) не могат да се сравнят

4 зад. Корените на уравнението $\left(2^{x-5}\right)^{x-6} = 4$ са:

а) $2; 4$ б) $1; 2$ в) $1; 3$ г) друг отговор

5 зад. За системата $\left| \begin{array}{l} 2x+y=4 \\ 4x^2+y^2=40 \end{array} \right.$ стойността на xy е:

а) 1 б) -6 в) 3 г) друг отговор

6 зад. Корените на уравнението $log_3\left(x^2+1\right) = log_3\left(x+3\right)$ са:

а) $1;-2$ б) $1;2$ в) 2 г) друг отговор

7 зад. Основите на трапец са в отношение $7:3$, а разликата им е $3,6\,cm$. Средната отсечка на трапеца е равна на:

а) 5 б) $2,7$ в) $4,5$ г) друг отговор

8 зад. В ΔABC $\angle BAC = 50^0$. Точката Q е център на външно вписаната окръжност, която се допира до страната BC. Мярката на $\angle BQC$ е:

а) 130^0 б) 65^0 в) 115^0 г) друг отговор

9 зад. Медианите AK и BM на ΔABC се пресичат в точка O. Ако $AB = 13\,cm$, $BC = 14\,cm$, $CA = 15\,cm$, то лицето на ΔAOM е равно на:

а) $84\,cm^2$ б) $42\,cm^2$ в) $14\,cm^2$ г) друг отговор

10 зад. Основата на равнобедрен триъгълник е $8\,cm$, а медианата към бедрото е $\frac{3\sqrt{17}}{2}\,cm$. Дължината на бедрото на триъгълника е равна на:

а) $10\,cm$ б) $4\sqrt{2}\,cm$ в) $2,5\,cm$ г) друг отговор

11 зад. Ако $tg\alpha = 2$, то стойността на израза $\left(sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha\right)^{-1}$ е равна на:

а) $6,25$ б) $6,5$ в) 10 г) друг отговор

12 зад. Основата на равнобедрен триъгълник е $4\sqrt{2}\,cm$, а медианата към бедрото е $5\,cm$. Дължината на бедрото е:

а) $\sqrt{28}\,cm$ б) $6\,cm$ в) $3\,cm$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише.
Задачите се оценяват с по 3 точки:

1 зад. Да се намери общият член редицата $5,11,29,...$, ако разликите на всеки два последователни члена образуват геометрична прогресия.

Отговор: …………………….

2 зад. Медианата, ъглополовящата и височината, построени през върха C на ΔABC, разделят $\angle ABC$ на четири равни части. Определете ъглите на триъгълника.

Отговор: ……………………..

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише решението.
Задачите се оценяват с по 10 точки:

1 зад. Да се реши неравенството $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}<\frac{1}{30}$.

2 зад. За кои стойности на реалният параметър p уравнението $x^2+2(p-1)x+p=-5$ има два реални отрицателни корена?

3 зад. Даден е квадрат със страна a. Да се намери лицето на равностранен триъгълник, единият връх на който е среда на страната на квадрата, а другите два лежат на диагоналите му.

math-bg.com

Отговори и кратки решения

Първа част:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.
а	в	а	г 4 и 7	б	г -1 и 2	в	б	в	а	а	б

Втора част:

1зад. Ако $a_1, a_2, ... a_n$ са членовете на числовата редица и $b_1, b_2, ... b_{n-1}$ са членовете на геометричната прогресия, то е изпълнено: $a_2 - a_1 = b_1$; $a_3 - a_2 = b_2$; ....; $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$. Събираме почлено тези равенства и получаваме: $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}$. Като имаме предвид, че $b_1 = 6$, $q = 3$, а $a_1 = 5$, получаваме $a_n = 3^n + 2$, за $\forall n \in N$.

2зад. Нека означим $AB = c$ и $\delta = \frac{1}{4} \sphericalangle ACB$ и CM е медиана. От синусова теорема за $\triangle AMC$ и за $\triangle BMC$ получаваме: $CM = \frac{c \cdot \cos 3\delta}{2 \cdot \sin \delta}$ и $CM = \frac{c \cdot \cos \delta}{2 \cdot \sin 3\delta} \Rightarrow \cos 3\delta \cdot \sin 3\delta = \cos \delta \cdot \sin \delta$. Чрез преобразувания получаваме $\delta = \frac{\pi}{8}$. След. $\sphericalangle ACB = 90^0$, а другите два ъгъла са съответно $22^0 30'$ и $67^0 30'$.

Трета част:

1зад. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-4} = \frac{-3}{x^2 - 5x + 4}$; $\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} = \frac{4}{x^2 - 5x + 6}$. Полагаме $x^2 - 5x + 4 = y$ и неравенството приема вида $-\frac{3}{y} + \frac{4}{y+2} < \frac{1}{30}$. Решенията му са $y \in (-\infty; -2) \cup (0; 10) \cup (18; \infty)$.

1) Ако $y < -2$, т.е. $x^2 - 5x + 4 < -2$, то $x \in (2; 3)$.
2) Ако $0 < y < 10$, т.е. $\left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 10 \end{array} \right.$, то $x \in (-1; 1) \cup (4; 6)$
3) Ако $y > 18$, т.е. $x^2 - 5x + 4 > 18$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$

Отг. $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; 3) \cup (4; 6) \cup (7; +\infty)$

2зад. $\left| \begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} p^2 - 3p - 4 \geq 0 \\ p - 1 > 0 \\ p + 5 > 0 \end{array} \right.$, от където $p \in [4; +\infty)$

3зад. Нека MNP е равностранният триъгълник, чието лице търсим, където M е среда на AB, $N \in BD$, $P \in AC$, $AC \cap BD = O$ и $MN \cap AC = Q$. Ако $\sphericalangle OMC = \varphi$, то $tg\varphi = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\sphericalangle OMQ = 30^0$ и $tg 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$. Понеже $\frac{2\sqrt{3}}{6} > \frac{3}{6}$, то $30^0 > \varphi$, след. правата MC е вътрешна за $\sphericalangle OMQ$ и не пресича диагонала AC, а неговото продължение, т.е. $\triangle MNP$ е единствен. Нека $MN = x$. Тогава $ON = \frac{x}{\sqrt{2}}$, а $BN = \frac{a-x}{\sqrt{2}}$. От косинусова теорема за $\triangle MBN$ получаваме: $x^2 = \left(\frac{a-x}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$, от където $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$. Тогава $S_{MNP} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \left(2\sqrt{3} - 3\right)}{8}$

math-bg.com

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ
12 АПРИЛ 2008г.

Трите имена ………………………………………………………………
Училище …………………………………………………………… клас ………………
Град (село)………………………………………………..

Общ брой точки от Първа част: ………………..
Общ брой точки от Втора част: ……………………..
Общ брой точки от Трета част: ……………………..

Краен брой точки: …………

ПЪРВА ЧАСТ:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.

ВТОРА ЧАСТ:

1зад. Отговор: ……………………..

2зад. Отговор: ……………………..

ТРЕТА ЧАСТ:

math-bg.com