СМБ – Секция"ИЗТОК"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 22.04.2007

7 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. 15 тестови задачи са разделени на групи по трудност: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки; от 6 до 10 - с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

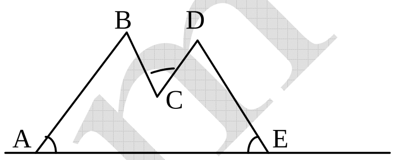
Организаторите Ви пожелават успех !

Име……………………………………………… училище……………………………. град/село ………………………..

1 зад. Нормалният вид на многочлена $(2a+3)^2-3(2-3a)(3a+2)$ е:

а) $29a^2+12a-3$; б) $-23a^2+12a+21$; в) $31a^2+12a-3$; г) Друг отговор

2 зад. На чертежа $AB \| CD$ и $BC \| DE$, като $\angle BAE = 58^0$ и $\angle AED = 63^0$.



Мярката на $\angle BCD$ е:

а) 59°; б) 61°; в) 58°; г) Друг отговор

3 зад. При $m \neq 0$ многочленът $m^2+x+0{,}25$ става двучлен на квадрат, ако заместим ***x* с:**

а) 0,25m или -0,25m; б) 0,5m или -0,5m; в) m или -m; г) Друг отговор

4 зад. Ако α и β са съседни ъгли и мярката на α е 25% от мярката на β, то β е:

а) 144°; б) 36°; в) 120°; г) Друг отговор

5 зад. Коренът на уравнението $(2x-5)(x+2)-2(x-2)(2+x)=2-x$ е:

а) 0; б) 4; в) -4; г) Друг отговор

6 зад. В ΔABC отсечките AM и BN са ъглополовящи и MN || AB. Ако AB = 12 см, а периметърът на четириъгълника ABMN е 36 см, то отсечката MN е равна на:

а) 6 см; б) 7 см; в) 8 см; г) Друг отговор

7 зад. Стойността на израза $\dfrac{(-4)^3.72}{2^2.3^3.(-8)^2}.\dfrac{7^{2007}-7^{2006}}{7^{2007}+7^{2006}}$ е

а) $\dfrac{1}{2}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) -18; г) Друг отговор

8 зад. Даден е изразът $3x^3+2kx-9k+11$, където k е параметър. Ако стойността на израза при x = 2 е неотрицателна, то k приема стойности от интервала:

а) $(-\infty;-7)$; б) $(7;+\infty,)$; в) $(-\infty;7)$; г) Друг отговор

9 зад. Върху правата p са взети точки A, B и C (B е между A и C). През точките A и C са построени прави m и n, перпендикулярни на p. В една и съща полуравнина с контур правата p върху m е взета точка K така, че AK=BC, а върху правата n - точка E така, че CE = AB. Ако M е среда на BK, а N – среда на BE, кое от следните твърдения не е вярно:

а) AM = NE; б) KE = 2. BN; в) MN || KE; г) ъглополовящата на $\prec KBE$ и MN са перпендкулярни.

10 зад. Трите мечета в зоопарка тежат общо 113 кг. Теглото на първото е $\dfrac{4}{5}$ от теглото на второто, а теглото на второто е 70% от теглото на третото. Мечетата тежат съответно:

а) 28 кг, 35 кг, 50 кг; б) 35 кг, 50 кг, 28 кг в) 55 кг, 33 кг, 25 кг г) Друг отговор

11 зад. Корените на уравнението $\left|3+\left|-2x+3\right|\right|=3$ са:

а) $\dfrac{3}{2}$ б) $-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}$; в) $-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}$; г) Друг отговор

12 зад. По една междуградска автобусна линия се движат 12 автобуса, които тръгват от началната спирка през равни интервали от време. Дължината на целия маршрут – от начална до крайна спирка и обратно – е 36 км. Средната скорост на автобусите е 30 км/ч. Два от автобусите се повреждат и се прибират в гаража. За да спазят разписанието, останалите трябва да се движат със скорост:

а) 35 км/ч; б) 40 км/ч; в) 36 км/ч; г) Друг отговор

13 зад. В равнобедрения триъгълник ABC височините към бедрата му AA_1 и BB_1 се пресичат в точка H. Ако AB = 12 см и $AH = 2.HA_1$ то периметърът на триъгълника е:

а) 30 см; б) 44 см; в) 28 см; г) Друг отговор

14 зад. Даден е равнобедреният триъгълник ABC (AC = BC), на който разликата между два от ъглите е 30° . Върху височината CH е взета т. P такава, че AP е перпендикулярна на BP. Ъглите на ΔAPC са:

а) 70°, 40° , 70° или 50°, 50° , 80° ; б) 25°, 20° , 135° или 5° , 40° , 135° ;

в) 35°, 20° , 125° или 45°, 20° , 115° г) Друг отговор

15 зад. :В ΔABC ъглополовящите при върховете A и B се пресичат в т. O. Ъгъл AOB е равен на 135° , а $\angle ACB - 30^\circ = 4.\angle CAB$. Точка M е такава, че AC е симетрала на BM. Ако разстоянието от точка B до AM е 18 см, то лицето на ΔACM е:

а) 324см²; б) 54 см²; в) 108 см²; г) Друг отговор

Отговори:

Зад.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Отг.	в	а	в	а	г –няма решение	в	б	г$\left(-\infty;7\right]$	б	а	а	в	г - 36	б	г-162 см^2

Кратки решения:

Задача 1: $(2a+3)^2-3(2-3a)(3a+2)=4a^2+12a+9-12+27a^2=31a^2+12a-3$

Задача 2: $\angle CDE=\angle BCD\ (BC \parallel DE)\times CD$ - кръстни ъгли. Нека лъчът DC пресича AE в точка P. Тогава в триъгълник PED ъгъл PDE е равен на $180^\circ-(58^\circ-68^\circ)$ = 59°

Задача 3: $\left(m\pm\frac{1}{2}\right)^2=m^2\pm2.m.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=m^2\pm m+\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm m$

Задача 4: α= 1/4β. Следователно 5/4 β = 180° . β= 144° .

Задача 5:

$$(2x-5)(x+2)-2(x-2)(2+x)=2-x$$
$$(x+2)[2x-5-2(x-2)]=2-x$$
$$(x+2)(2x-5-2x+4)=2-x$$
$$(x+2)(-1)=2-x$$
$$-x-2=2-x$$
$$-x+x=2+2$$
$$0.x=4$$

Следователно няма решение.

Задача 6: Доказва се, че ΔAMN и ΔBNM са равнобедрени, откъдето следва, че AN = MN = BM. Тогава 3.MN + 12 = 36, т.е. MN = 8 см.

Задача 7: $\frac{(-4)^3.72}{2^2.3^3.(-8)^2}.\frac{7^{2007}-7^{2006}}{7^{2007}+7^{2006}}=\frac{-2^6.2^3.3^2}{2^2.3^3.2^6}.\frac{7^{2006}(7-1)}{7^{2006}.(7+1)}=\frac{-2^9.3^2}{2^8.3^3}.\frac{6}{8}=\frac{-2.2.3}{2^3.3}=-\frac{1}{2}$

Задача 8:

$$3.2^3+2k.2-9k+11\geq0$$
$$35-5k\geq0$$
$$k\leq7$$

Задача 9: Триъгълниците KAB и BCE са правоъгълни и еднакви. AM е медиана към хипотенузата KB, т.е $AM=\frac{1}{2}KB.$ N е среда на BE = KB. Следователно AM = NE. Ако означим острите ъгли на правоъгълните триъгълници KAB и BCE съответно $\prec AKB=\prec CBE=\alpha$ и $\prec ABK=\prec BEC=\beta$, то $\prec KBE=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$. Като се вземат предвид равенствата BE = KB и BM = BN, следва, че ΔKBE и ΔMBN са правоъгълни и равнобедрени. Следователно ъглополовящата на ъгъл MBN е и височина в ΔMBN, т. е. перпендикулярна е на MN. Като хипотенуза KE не е равна на катета BE=2.BN.

Задача 10: Теглото на третото мече е x, на второто - $\frac{7}{10}x$ и на първото - $\frac{14}{25}x$. x = 50. Тогава първото мече тежи 28 кг, второто – 35 кг, а третото – 50 кг.

Задача 11: От $\left|3+\left|-2x+3\right|\right|=3$ следва, че:

$$3+\left|-2x+3\right|=3\vee3+\left|-2x+3\right|=-3$$
$$\left|-2x+3\right|=0; \qquad \left|-2x+3\right|=-6$$
$$-2x+3=0; \qquad \textit{няма решение}$$
$$2x=3$$
$$x=\frac{3}{2}$$

Задача 12: Разстоянието между всеки автобус и следващия трябва да бъде $\frac{36}{12}=3$ км. Това разстояние трябва да бъде изминато със средна скорост 30 км/ч. Оттова следва, че интервалите от време между автобусите са $3:30$ часа или $3.\frac{1}{30}=3.\frac{1}{30}.60=6$

минути. Когато автобусите по линията са 10, разстоянието 3 км, трябва да бъде изминато за $\frac{6}{60}$ часа със средна скорост

$\frac{36}{10}:\frac{6}{60}=\frac{36}{10}.10=36$ км/ч.

Задача 13: Доказва се, че триъгълниците ABA_1 и BAB_1 са еднакви и че ъглите BAH и ABH са равни. После се доказва еднаквостта на триъгълниците AHB_1 и BHA_1, от където следва $HB_1 = HA_1$. От това, че триъгълник AHB_1 е правоъгълен и AH = 2. HB_1 следва, че ъгъл $HAB_1 = 30^o$, т.е ъгъл $A_1AC = 30^o$ и в правоъгълния триъгълник A_1AC ъгъл $A_1CA = 60^o$. Но това е ъгълът при върха на равнобедрения триъгълник ABC, откъдето се доказва, че триъгълник ABC е раностранен, т.е периметърът му е 3.12= 36 см.

Задача 14: I случай: $\alpha-\gamma = 30^\circ$

$\alpha = \gamma+30^\circ$

$60^\circ + 3\gamma = 180^\circ$

$\gamma = 40^\circ$

$\alpha = \beta = 70^\circ$

Триъгълник ABP – равнобедрен, правоъгълен, CP – ъглополовяща. Следователно ъгъл CAP е 25^o , ъгъл ACP = е 20^o и ъгъл APC $= 135^o$.

II случай: $\gamma- \alpha = 30^\circ$

$\gamma = \alpha +30^\circ$

$30^\circ + 3\alpha = 180^\circ$

$\alpha= \beta = 50^\circ$

$\gamma = 80^\circ$

Триъгълник ABP – равнобедрен, правоъгълен, CP – ъглополовяща. Следователно ъгъл CAP е 5^o , ъгъл ACP = е 40^o и ъгъл APC $= 135^o$.

Задача 15: Нека $\angle CAB=\alpha, \angle CBA=\beta, \angle ACB=\gamma$. В ΔABO $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ-135^\circ=45^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \gamma=90^\circ$,

т.е ΔABC е правоъгълен.

$\gamma-30^\circ=4\alpha; \gamma=90^\circ \Rightarrow \alpha=15^\circ$. Откъдето се намира и $\beta=75^o$. AC е симетрала на BM, следователно MC = CB, а ъглите ACM и ACB са прави. Като се прибави, че страната AC е обща за двата триъгълника ABC и AMC, се получава, че те са еднакви по I признак. От това следва, че $\angle BAC=\angle MAC=15^\circ$, *т.е.* $\angle BAM=30^\circ$ и AM = AB. Нека BK е перпендикулярна на AM. Следователно BK = 18 см.

В ΔABK – правоъгълен с ъгъл BAK = 30^o AB = 2. BK = 2.18 = 36 см. Тогава

$S_{AMB}=\frac{1}{2}AM.BK=\frac{1}{2}36.18=324cm^2$, а $S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{AMB}=\frac{1}{2}324=162cm^2$