СМБ – Секция "ИЗТОК"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 29.04.2006

9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор, "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат, 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки: от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име…………………………………………………..училище……………..................…….град…...............................………..

1 зад. Корените на уравнението $\frac{1}{x-2}:\frac{x}{x^2-4}=1$ са:

а) 2 б) -2 в) $x\in\varnothing$ г) друг отговор

2 зад. Реалните корени на уравнението $(x-6)\sqrt{5-x}=0$ са:

а) $x_1=6, x_2=5$ б) $x=6$ в) $x=5$ г) друг отговор

3 зад. Да се намерят коефициентите a, b и c във функцията $f(x)=ax^2+bx+c$, ако $f(0)=1$, $f(1)=0$ и $f(2)=1$.

а) $a=1; b=-1; c=2$ б) $a=1; b=-2; c=1$ в) $a=1; b=2; c=1$ г) друг отговор

4 зад. Точката M е средата на страната AB на успоредника $ABCD$. Диагоналът AC и отсечката MD се пресичат в точка P. Отношението $AP:PC$ е равно на:

а) $1:2$ б) $2:3$ в) $3:1$ г) друг отговор

5 зад. Решенията на системата уравнения $\begin{vmatrix} x^4+y^4=17 \\ x+y=3 \end{vmatrix}$ са:

а) $(2;1)$ и $(-1;-2)$ б) $(1;2)$ и $(-2;-1)$ в) $(1;2)$ и $(2;1)$ г) друг отговор

6 зад. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $mx^2-px+q=0$, то $x_1^3+x_2^3$ е равно на:

а) $-\frac{p}{m}\left(\frac{p^2-3mq}{m^2}\right)$ б) $\frac{p}{m}\left(\frac{p^2+3mq}{m^2}\right)$ в) $-\frac{p}{m}\left(\frac{p^2+3mq}{m^2}\right)$ г) друг отговор

7 зад. Реалните корени на уравнението $\frac{2}{7}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-x-\frac{1}{x}+\frac{9}{7}=0$ са:

а) $x_1=0{,}5, x_2=2$ б) $x_1=-0{,}5, x_2=-2$ в) $x_1=0{,}5, x_2=-2$ г) друг отговор

8 зад. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страната AB в точка P. Ако $AP=5\,cm$ и $BC=6\,cm$, то периметърът на $\triangle ABC$ е равен на:

а) $11\,cm$ б) $17\,cm$ в) $16\,cm$ г) друг отговор

9 зад. При $x\ge 1$ и $x\ne 5$ най-голямата стойност на дробта $\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ е:

а) 2 за $x=0{,}5$ б) $0{,}5$ за $x=1$ в) 1 за $x=0{,}5$ г) друг отговор

10 зад. Дадено е уравнението $(m+1)x^2-2(m-1)x-8=0$. За коя стойност на параметъра m, сборът от квадратите на корените на уравнението е 5?

а) $m_1=3; m_2=-5$ б) $m_1=-3; m_2=5$ в) $m_1=3; m_2=5$ г) друг отговор

11 зад. Дадено е уравнението $2x^2+\left(8-a^2\right)x-4a^2=0$, където а е параметър, удовлетворяващ условието $-1\le a\le 2$. Най-малкото и най-голямото число, които могат да бъдат корени на уравнението са:

а) $0{,}5$ и 2 б) -4 и 2 в) $-0{,}5$ и 2 г) друг отговор

12 зад. Корените на уравнението $x\sqrt{x^2-25}=2\sqrt{x^2-25}$ са:

а) $\pm 2; \pm 5$ б) ± 5 в) $2; \pm 5$ г) друг отговор

13 зад. Лицето на правоъгълен триъгълник е S, а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е R. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

а) $r=-R+\sqrt{R^2+S}$ б) $r=R+\sqrt{R^2+S}$ в) $r=R-\sqrt{R^2-S}$ г) друг отговор

14 зад. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC и $\angle ADB=60^0$. Ако радиусът на окръжността е $2\,cm$, то дължината на страната BC е равна на:

а) $1\,cm$ б) $3\,cm$ в) не може да се определи г) друг отговор

15 зад. Ако $a^2+b^2=6ab$, $a>0$ и $b>0$, то $\frac{4ab}{\left|a^2-b^2\right|}$ е равно на:

а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ б) 1 в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ г) друг отговор

9 клас

Отговори и упътвания:

1В; 2В; 3Б; 4А; 5В; 6Г $\frac{p}{m}\left(\frac{p^2-3mq}{m^2}\right)$; 7А; 8Г 26cm; 9Б; 10 А; 11Б; 12Б; 13А; 14Г 2cm; 15В.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	В	Б	А	В	Г $\frac{p}{m}\left(\frac{p^2-3mq}{m^2}\right)$	А	Г 26 cm	Б	А	Б	Б	А	Г- 2 cm	В

2. $(x-6)\sqrt{5-x}=0 \Leftrightarrow x-6=0$ т.е. $x=6$ или $\sqrt{5-x}=0$ т. е. $x=5$. При $x=6$ получаваме $0.\sqrt{-1}=0$. Операцията $0.\sqrt{-1}$ няма смисъл в множеството на реалните числа. Следователно $x=6$ не е реален корен. Отговор. $x=5$.

3. $\begin{vmatrix} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f(2)=1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} c=1 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=1 \end{vmatrix} \Rightarrow a=1; b=-2; c=1.$

4. Нека O е пресечната точка на диагоналите на успоредника. В $\triangle ABD$ точка P е медицентър. От $AP:PO=2:1$ и $AO=OC$ следва, че $AP:PC=1:2$.

5. Преобразуваме израза $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=\left((x+y)^2-2xy\right)^2-2x^2y^2$. Полагаме $x+y=u$ и $xy=v$ и получаваме системата $\begin{vmatrix} \left(u^2-2v\right)^2-2v^2=17 \\ u=3 \end{vmatrix}$ В полагането за $v=2$ и $u=3$ получаваме $x=1, y=2$ и $x=2, y=1$. За $v=16$ и $u=3$ след заместване в полагането се получава, че системата няма решение.

6. От формулите на Виет за корените на уравнението получаваме $x_1+x_2=\frac{p}{m}$ и $x_1x_2=\frac{q}{p}$.

Преобразуваме израза $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=\frac{p}{m}\left(\frac{p^2}{m^2}-3\frac{q}{m}\right)=\frac{p}{m}\left(\frac{p^2-3mq}{m^2}\right)$.

7. Полагаме $x+\frac{1}{x}=u$ и получаваме уравнението $\frac{2}{7}\left(u^2-2\right)-u+\frac{9}{7}=0$. За $u_1=\frac{5}{2}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$, а за $u_2=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1$ уравнението няма реални корени.

8. Окръжността се допира до BC и AC съответно в точките M и Q.
От $AP=AQ=5$, $BP=BM$, $CM=CQ$, $BM+CM=6\Rightarrow P_{\triangle ABC}=2.5+2.6=26\ cm.$

9. След рационализиране на числителя на дробта получаваме
$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{x-1-4}{(x-5)\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$. Последната дроб има най-голяма стойност, когато знаменателят й е най-малък, което се получава при $\sqrt{x-1}=0$, т.е. когато $x-1=0\Rightarrow x=1$ и е $\frac{1}{2}$.

10. Корените на уравнението са $x_1=2$ и $x_2=\frac{-4}{m+1}$. От $4+\frac{16}{(m+1)^2}=5$ намираме $(m+1)^2=16$, т. е. $m+1=\pm4\Rightarrow m_1=3,\ m_2=-5$.

11. Корените на уравнението са $x_1=\frac{a^2}{2}, x_2=-4$. Когато a се изменя в интервала $[-1;2]$, коренът x_1 се изменя в интервала $[0{,}5;\ 2]$, а $x_2=-4$ не се изменя. Следователно най-малкия и най-големия корени са -4 и 2.

12. Допустимите стойности са $x\in(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$.
$x\sqrt{x^2-25}=2\sqrt{x^2-25}\Leftrightarrow(x-2)\sqrt{x^2-25}=0$ От $x-2=0$ или $x^2-25=0\Rightarrow x_1=2$ и $x_{2,3}=\pm5$. Но $x=2$ не принадлежи на множеството от допустими стойности, следователно не е корен на уравнението.

13. От $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b-c}{2}+c=r+2R$ следва $S=p.r=(r+2R)r$, т.е. $r^2+2Rr-S=0$. Тогава $r=-R+\sqrt{R^2+S}$.

14. $\angle ADB = \angle ACB = 60^0$ **-** вписани ъгли за окръжността. Тъй като AC е диаметър за окръжността, то $\angle ABC = 90^0$. $\triangle ABC$ е правоъгълен с $\angle BAC = 30^0 \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.4 = 2\ cm.$

15. Към двете страни на равенството $a^2 + b^2 = 6ab$ прибавяме и изваждаме $2ab$ и получаваме $(a+b) = 2\sqrt{2}\sqrt{ab}$ и $(a-b) = 2\sqrt{ab}$. Преобразуваме израза $\frac{4ab}{\left|a^2 - b^2\right|} = \frac{4ab}{\left|(a+b)(a-b)\right|} = \frac{4ab}{\left|2\sqrt{2}\sqrt{ab}.2\sqrt{ab}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

ИЗГОТВИЛ:

Диана Миланова, Русе