СМБ – Секция "ИЗТОК"

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 29.04.2006

8 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор . "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат . 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности : от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки ; от 6 до 10- с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име…………………………………………………..училище…………….........................…..град…...................………..

1 зад. В дефиниционната си област изразът $\dfrac{1}{2x-2}-\dfrac{x-2}{1-x^2}$ е равносилен на:

а) $\dfrac{3}{2(x+1)}$; б) $\dfrac{5-x}{2(x^2-1)}$; в) $-\dfrac{3+x}{2(x^2-1)}$; г) друг отговор.

2 зад. Графиките на функциите $y=2x+3$ и $y=2x-3$ са:

а) съвпадащи; б) успоредни; в) перпендикулярни; г) друг отговор.

3 зад.Изразът $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ е равен на:

а) $2\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{2}$; в) –10; г) друг отговор

4 зад. В успоредника $ABCD$ точка M е от диагонала AC, такава че CM:CA=1:3. Ако точка S е среда на DC, то отношението SM:SB е равно на:

а) 2:1; б) 3:1; в) 1:2; г) друг отговор.

5 зад. Допирателната през върха C, към описаната около ΔABC окръжност сключва с правата AB ъгъл равен на 30^o. Ако вътрешният ъгъл при върха B е 75^o, то вътрешният ъгъл при върха A е равен на:

а) 30^o; б) 45^o; в) 105^o; г) друг отговор.

6 зад. Ако е изпълнено $x+y=2$ и $x^2+y^2=6$, то стойността на израза $\dfrac{x^6y^2-x^2y^6}{x^7y-xy^7}\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$ е:

а) –6 ; б) 12; в) 3; г) друг отговор.

7 зад. Стойността на израза $A=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ е:

а) 0; б) $2\sqrt{5}$; в) 4; г) друг отговор.

8 зад. Нека a е число, за което уравнението $x^2-3ax+9=0$ има двоен корен. Най-големият възможен корен на $x^2-4x+a=0$ е: а) $2+\sqrt{6}$; б) $2+\sqrt{2}$; в) $2-\sqrt{6}$; г) друг отговор.

9 зад. В трапеца $ABCD$ ъглополовящите на ъглите BAD и ADC се пресичат в точка M. Ако разстоянието от точка M до средата на бедрото AD е 4,5 cm, то дължината на бедрото AD е равно на:

а) 4,5cm; б) не може да се пресметне; в) 9 cm; г) друг отговор.

10 зад. В $\Delta\ ABC$ точка S дели AB в отношение 1:3 от точка A, а точка G е медицентър. Ако $S_{ABC}=24cm^2$ то S_{ASG} е равно на:

а) 3 cm^2; б) 2 cm^2; в) 6 cm^2; г) друг отговор.

11 зад. Нека $a\Diamond b=\dfrac{a-2b}{2}$. Ако $M=(3\Diamond 4)\Diamond 5$ и $N=3\Diamond(4\Diamond 5)$, то:

а) $M<0$, $N>0$; б) $M=N$; в) $M>N$; г) друг отговор.

12 зад. Външните ъгли при върховете A, B и C за ΔABC се отнасят съответно, както 7:11:6. Ъгълът между ъглополовящата и медианата през върха C е:

а) 30^o; б) 45^o; в) 15^o; г) друг отговор.

13 зад. За кои цели стойности на k числата k–6 и k+42 са едновременно квадрати на цели числа?

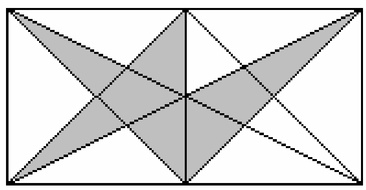
а) 7 и 22 ; б) безброй много; в) числата кратни на 6;г) друг отговор.

14 зад. Ъглополовящите на ъглите при голямата основа на трапец се пресичат в точка от малката основа. Ако периметърът на трапеца е 26 см, а средната му основа е 9 см,то отсечката свързваща средите на диагоналите на трапеца е:

а) 1 см; б) 2 см; в) 3 см ; г) друг отговор.

15 зад. Два квадрата са разположени, както е показано на чертежа. Ако лицето на защрихованата част е 24 кв. см., то по-голямата страна на правоъгълника е:

а) 18 см; б) 8 см; в) 12 см; г) друг отговор.



8 клас

Отговори и упътвания: 1а; 2б; 3в; 4г1:35б; 6а; 7в; 8а; 9в; 10б; 11а; 12а; 13г7,22,127; 14а; 15в

Зад. 4. Точка M е медицентър на BCD, тогава $SM:MB=1:2$.

Зад. 5. Ако M е пресечната точка на допирателната и правата AB, се достига до извода, че B е между A и M, защото в другия случай $\angle BAC=105^o$. $\angle ABC=\angle BMC+\angle BCM$, като външен $\Rightarrow$ $\angle BCM=45^o=\angle BAC$, защото се измерват с една дъга.

Зад. 6. $4=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=6+2xy \Rightarrow xy=-1$ преобразуваме израза до $xy\left(x^2+y^2\right)=-6$

Зад. 7. $A=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2+\sqrt{5}\right|-\left|2-\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-2\right)=4$

Зад. 8. $D=9a^2-36=0 \Rightarrow a=\pm 2$, при $a=2$ $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$, при $a=-2$ $x_{3,4}=2\pm\sqrt{6}$

Зад. 9. $\angle DAM+\angle ADM=1/2(\angle BAD+\angle ADC)=90^o \Rightarrow \Delta AMD$ е правоъгълен и хипотенузата $AD=2CM=9$

Зад. 10. Нека M среда на AB, тогава $S_{ASG}=\frac{1}{2}S_{AMG}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}S_{AMC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{ABC}=2$

Зад. 11. $M=\left(\frac{3-2.4}{2}\right)\lozenge 5=\frac{-\frac{5}{2}-5.2}{2}=-\frac{25}{4}$; $N=3\lozenge\left(\frac{4-2.5}{2}\right)=3\lozenge(-3)=\frac{3-2.(-3)}{2}=\frac{11}{2}$

Зад. 12. Нека външните ъгли на триъгълника при A, B и C са съответно $7x$, $11x$ и $6x$, тогава $180^o-7x+180^o-11x+180^o-6x=180^o \Rightarrow$ $x=15^o$. Ъглите в ABC са съответно 75^o, 15^o и 90^o. $\angle ICO=\angle ACO-\angle ACI=75^o-45^o=30^o$

Зад. 13. $k-6=t^2, k+42=p^2$, където $t<p$ са естествени числа. $p^2-t^2=48$, $(p-t)(p+t)=48$, тогава $p-t>p+t$ са целите делители на 48, но $p-t$ и $p+t$ се от еднаква четност, следователно и двете са четни

p-t	2	4	6
p+t	24	12	8
t	11	4	1
p	13	8	7
k	127	22	7

Зад. 14. Нека трапеца е $ABCD$, AL и BL са ъглополовящи. Лесно се установява, че ADL и BCL са равнобедрени. $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=AB+CL++CD+DL=AB+2CD=26$. От средната основа $AB+CD=18$, тогава $CD=8$, $AB=10$. Средите на диагоналите лежат на средната основа, като другите две части от нея са равни на ½ CD, като средни отсечки в ACD и BCD. Търсената отсечка е 9-4-4=1.

Зад. 15. Да означим двата квадрата $AMND$ и $MBCN$, $AC\cap BD=Q$, BN пресича AC и CM съответно в P и F, а BD пресича CM в T. Точка Q е обща среда на AC, BD и $MN \Rightarrow P$ и T са медицентрове на BDC и ABC. Нека $S_{QPN}=X$. От свойството на медицентъра и медианите $S_{NPC}=2X$, $S_{QMC}=S_{NQC}=3X$, $S_{MBCN}=2S_{MNC}=12X$, $S_{ABCD}=2S_{MBCN}=24X$. F е среда на $MC \Rightarrow S_{BFC}=1/2S_{MBC}=3X$, тогава за S_{PFC} остава X. $QTM\cong QPM \Rightarrow S_{QTM}=X$. Лицето на затъмнената част става общо $8X=24$, $X=3$ $S_{MBCN}=12X=36$, страната на квадрата $\sqrt{S}=6$, голямата страна е 12.