

СМБ – Секция "ИЗТОК"
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 29.04.2006
10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки; от 6 до 10 – с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

Зад. 1 Ако $y - x = 1$ и $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$, то $(x + y)^2$ е равно на:

- а) 3 б) 9 в) 6 г) друг отговор

Зад. 2 В кръг с радиус 4 е вписан квадрат, а в квадрата – втори квадрат, върховете на който са среди на страните на първия квадрат. Лицето на втория квадрат е равно на:

- а) 4 б) 8 в) 16 г) друг отговор

Зад. 3 Ако сумата от квадратите на корените на уравнението $x^2 - 4x + a = 0$ е равна на 12 то a е равно на:

- а) 1 б) 3 в) 5 г) друг отговор

Зад. 4 Държините на две от страните на един триъгълник са равни на 3 и $\sqrt{11}$. Медианите към тези страни са взаимно перпендикулярни. Дължината на третата страна е:

- а) $\sqrt{20}$ б) 2 в) 4 г) друг отговор

Зад. 5 Квадратното уравнение с корени $\cos 60^\circ$ и 1 е:

- а) $x^2 - 3x + 2 = 0$ б) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ в) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ г) друг отговор

Зад. 6 Ако $4^x + 4^{-x} = 23$, то сумата $2^x + 2^{-x}$ е равна на:

- а) 2 б) 4 в) 5 г) друг отговор

Зад. 7 Ъглополовящата на острия ъгъл в правоъгълен триъгълник дели срещулежащия катет на части, равни на 4 см и 5 см. Хипотенузата на този триъгълник има дължина:

- а) 15 см б) 9 см в) 12 см г) друг отговор

Зад. 8 Най-малкото цяло решение на неравенството $\frac{0,25^{3x+5}}{0,0625^{6-x}} < 64$ е равно на:

- а) 1 б) -1 в) 5 г) друг отговор

Зад. 9 Две окръжности с радиуси 12 и 3 се допират външно в точка А. Общата вътрешна допирателна и една от общите външни допирателни на двете окръжности се пресичат в точка D. Дължината на отсечката AD е равна на:

- а) 7,5 б) 6 в) 9 г) друг отговор

Зад. 10 Сумата $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ е равна на:

- а) 11 б) -9 в) 9 г) друг отговор

Зад. 11 Две окръжности с радиус r се допират по между си в точка С и външно до окръжност с радиус 8 в точките А и В, като $AB = 12$. Радиусът r е равен на:

- а) 16 б) 24 в) 8 г) друг отговор

Зад. 12 В равнобедрен трапец с взаимно перпендикулярни диагонали височината е равна на 10 см. Средната отсечка на трапеца е равна на:

- а) 10 б) 5 в) 20 г) друг отговор

Зад. 13 Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$16^x - (a+2) \cdot 4^x + 4a - 8 = 0$ има единствено решение.

- а) 6 б) (2;6) в) (2;6] г) друг отговор

Зад. 14 В правоъгълен триъгълник допирната точка с вписаната окръжност дели хипотенузата на отсечки с дължини 5 см и 12 см. Да се намери дължината на по-големия катет.

- а) 9 б) 12 в) 15 г) друг отговор

Зад. 15 Катетите на правоъгълен триъгълник са 3 см и 4 см. Да се намери разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност.

- а) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ в) $\sqrt{6}$ г) друг отговор

10 клас

Отговори: 1б; 2в; г-2;4б;5г $2x^2-3x+1=0$;6в;7а;8а;9б;10в;11б;12а;13г $a \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$;14в;15б

Зад.1 От $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow 2(y-x) = xy$. От $y-x=1 \Rightarrow xy=2$.

От $(y-x)^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 2xy + x^2 - 4xy = (x+y)^2 - 8 = 1 \Rightarrow (x+y)^2 = 9$

Зад.2 Диаметъра на кръга е 8, а страната на първия квадрат е $4\sqrt{2}$. Лесно се намира страната на втория – 4. Тогава лицето му е 16.

Зад.3 От условието $x_1^2 + x_2^2 = 12$, откъдето $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12 \Rightarrow 16 - 2a = 12 \Rightarrow a = 2$

Зад.4 От системата
$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 \\ (2y)^2 + x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1. AB^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow AB = 2$$

Зад.5 След като се рационализират знаменателите, за стойността на израза се получава $\sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

Зад.6 От $4^x + 4^{-x} = 23$ получаваме, че $(2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 23 \Rightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 25 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 5$

Зад.7 От свойството на ъглополовящата следва $\frac{4}{b} = \frac{5}{c} \Rightarrow b = \frac{4c}{5}$. От Питагорова теорема получаваме

$$c^2 = \left(\frac{4c}{5}\right)^2 + 81 \Rightarrow c = 15.$$

Зад.8 След преобразуване неравенството се свежда до $4^{7-5x} < 4^3$ и решението е $x > \frac{4}{5}$. След. най-малкото цяло решение е 1.

Зад.9 Ако S и T са допирните точки на външната допирателна с двете окръжности, то

$$AD = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 - 9^2} = 6$$

Зад.10 Уравнението, което има корени $\frac{1}{2}$ и 1 е $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Зад.11 От подобните триъгълници получаваме $\frac{12}{2r} = \frac{8}{8+r}$, откъдето $r = 24$

Зад.12 Средната отсечка е равна на 10 см.

Зад.13 $a \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$

Зад.14 $(5+r)^2 + (12+r)^2 = 17^2$, откъдето $r = 3$, следователно по-големият катет е 15 см.

Зад.15 $d = \frac{\sqrt{5}}{2}$