Пробен зрелостен изпит по математика, проведен на 28.03.2009 година

Тестът съдържа 28 задачи по математика:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 5 задачи със свободен отговор;
- 3 задачи, решенията на които се представят в писмен вид с необходимите обосновки.

Максималният брой точки на целия тест е 100. Време за работа – 4 астрономически часа.
Приятна работа!

<u>Първа част</u> (всяка задача – по 2 точки)

1. Подредете по големина числата $a=3\sqrt{2};\ b=2\sqrt{3};\ c=\log_{0,2}25$.

А) $a<b<c$ Б) $c<b<a$ В) $b<a<c$ Г) $c<a<b$

2. Дадено е уравнението $2x^2-5x-8=0$ с корени x_1 и x_2. Стойността на израза $x_1(1+x_2)+x_2$ е равна на:

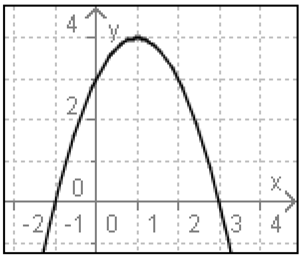
А) –1,5 Б) 1,5 В) 5 Г) 2,5

3. За аритметична прогресия се знае, че $S_n=n^2-5n$. Да се намери a_3

А) –4 Б) 8 В) –10 Г) 0

4. Ако числата $1;\ x;\ x+2$ образуват растяща геометрична прогресия, то частното ѝ е:

А) 2 Б) 4 В) –1 Г) 1



5. Графиката от чертежа е на функцията:

А) $-x^2-2x+3$ Б) $-x^2+3$ В) x^2-2x-3 Г) $-x^2+2x+3$

6. Стойността на израза $\log_{1/2}\sqrt[3]{8.2^2}$ е:

А) 4 Б) 1/2 В) –5/3 Г) 8

7. Колко трицифрени числа, без повтарящи се цифри, могат да се образуват от 1, 2, 3 и 4?

А) C_4^3 Б) V_4^3 В) 3^4 Г) 4^3

8. Броят на реалните корени на уравнението $x^4+7x^2+5=0$ е:

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

9. Решенията на уравнението $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$ са:

А) 1 Б) 1 и –1 В) $x\in(-\infty;1]$ Г) $x\in[1;\infty)$

10. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\log_{x+3}(-x^2+25)$ е:

А) $(-\infty;-5)\bigcup(5;+\infty)$ Б) $(5;+\infty)$ В) $(-3;-2)\cup(-2;5)$ Г) $(-3;5)$

11. Кое от следните твърдение е вярно:

А) Модата е стойността на метричния признак, заемащ централно място в статистическия ред;
Б) Всяка крайна съвкупност от данни има медиана;
В) Медианата винаги е по-голяма от модата;
Г) Средното аритметично на крайна съвкупност от данни е по-голямо от модата.

12. Кое число трябва да се добави към редицата 10, 7, 8, 2, така че средното аритметично да стане 6?

А) 6 Б) 7 В) 1 Г) 3

13. Кое от следните числа може да бъде вероятност на събитие:

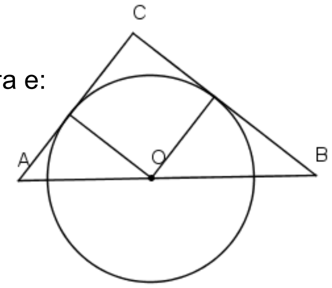
А) $\sin\dfrac{\pi}{4}+1$ Б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ В) $\log_3 2-1$ Г) $100^{-\frac{1}{2}}$

14. Ако $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3},\ \alpha\in(180^\circ;270^\circ)$, то стойността на $\operatorname{cotg}\alpha$ е:

А) $-2\sqrt{2}$ Б) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ В) $2\sqrt{2}$ Г) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

15. Коя функция е четна, ако: $f_1(x)=x^2\cos x$, $f_2(x)=\dfrac{x}{\sin x+2}$, $f_3(x)=\dfrac{x}{\sin x}$, $f_4(x)=x^2\operatorname{tg}x^2-x$?

А) $f_1(x).f_2(x)$ Б) $f_2(x).f_3(x)$ В) $f_1(x).f_3(x)$ Г) $f_1(x).f_4(x)$



16. Правоъгълният ΔABC на чертежа е с катети AC=3 и BC=6. Радиусът на окръжността е:

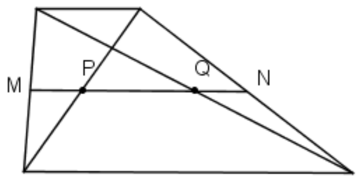
А) 1 Б) 2 В) 2,5 Г) $3\sqrt{2}$

17. Радиусът на вписаната и описаната окръжност на правоъгълен триъгълник са съответно 2 и 5. Периметърът му е:

А) 8 Б) 12 В) 10 Г) 24

18. Да се намери $\sphericalangle BAC$ на ΔABC, ако $BC = 2\sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{2}$ и $AB = 4$

А) 135^o Б) 45^o В) 120^o Г) 60^o



19. Трапеца от чертежа има основи 10 и 4, MN е средната основа. Отсечката PQ е:

А) 4 Б) 6 В) 3 Г) 5

20. Окръжности с радиуси 6 и 24 се допират външно. Общата им външна допирателна е равна на:

А) 24 Б) 12 В) 18 Г) 4

<u>Втора част</u> (всяка задача – по 3 точки)

21. За трапеца $ABCD$ е дадено, че $AB = 18$, $CD = 8$, $AC = 12$ и $AD = 6$. Тогава дължината на BC е:

Отговор:____________

22. Равнобедрен трапец е описан около окръжност. Ако основите му са 25 и 1, радиусът на тази окръжност е:

Отговор:____________

23. Корените на уравнението $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-4x+3} = \frac{x+1}{2(x-3)}$ са: Отговор:____________

24. Ъглополовящата AP на ΔABC дели ъглополовящата CL в отношение 5:3, считано от върха. Да се намерят страните на триъгълника, ако периметърът му е 24 и $AC = 5$.

Отговор:____________

25. Шест ученици искат да седнат на пейка, като Асен и Петър са приятели и държат да бъдат един до друг. Броят на възможните начини да стане това е:

Отговор:___________

<u>Трета част</u> (всяка задача – по 15 точки)

26. Три числа образуват геометрична прогресия. Ако първото се намали с 25%, а другите останат непроменени, се получава аритметична прогресия. Да се намери частното на първата прогресия.

27. Нека x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $x^2-(2k+1)x+k^2=0$. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(k) = x_1^2 + x_2^2$, за $k \in [-2;4]$.

28. Центърът на описаната окръжност около ΔABC е точка O. Ако $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $AC = 4$ и $S = 6\sqrt{3}$, да се намери радиуса на тази окръжност.

Отговори:

<u>Първа част:</u>

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Б	А	Г	А	Г	В	Б	А	Г	В	Б	Г	Г	В	В	Б	Г	А	В	А

<u>Втора част:</u> **<u>21. 9;</u>** **<u>22. 2,5;</u>** **<u>23. 5;</u>** **<u>24. 9 и 10;</u>** **<u>25. 240;</u>**

<u>Решения на третата част:</u>

26. Означаваме числата с a, aq, aq^2, като се намали първото число с 1/4 остава $\frac{3}{4}a$. Тогава $\frac{3}{4}a, aq, aq^2$ образуват аритметична прогресия, следователно $\frac{3}{4}a + aq^2 = 2aq \,/\, a$ и се получава уравнението: $4q^2 - 8q + 3 = 0$. Корените му са отговора на задачата.

Отг. 3/2 и 1/2

27. От това, че корените са реални числа получаваме $D = (2k+1)^2 - 4k^2 \geq 0$, т. е. $k \geq -\frac{1}{4}$.

От формулите на Виет намираме, че $f(k) = 2k^2 + 4k + 1$. Търсим НГС и НМС в интервала $[-\frac{1}{4}; 4]$.

Отг. НМС=1/8 и НГС=49

28. Т. к. $\sphericalangle AOB = 120^o$ е централен ъгъл, то вписаният ъгъл $\sphericalangle ACB = 60^o$ или $\sphericalangle ACB = 120^o$.

<u>При остроъгълен триъгълник:</u> От формулата за лице на триъгълник получаваме: $\dfrac{4.AC.\sin 60^o}{2} = 6\sqrt{3}$. Тогава $AC = 6$ и от косинусова теорема следва, че $AB = 2\sqrt{7}$, а от синусова теорема намираме, че $R = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

<u>При тъпоъгълен триъгълник:</u> От формулата за лице на триъгълник получаваме: $\dfrac{4.AC.\sin 60^o}{2} = 6\sqrt{3}$. Тогава $AC = 6$ и от косинусова теорема следва, че $AB = 2\sqrt{19}$, а от синусова теорема намираме, че $R = \dfrac{2\sqrt{57}}{3}$.