<u>Секция "Изток" – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.12.2009 г.

9 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>

<u>Регламент:</u> Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име...училище.......................................град.....................

Зад 1. В координатна система са зададени правите $y = x + 5$ и $y = 2x + b$, които се пресичат в точка от абсцисната ос. Стойността на $\boldsymbol{b}$ е равна на:

а) 10; б) 5; в) − 5; г) друг отговор.

Зад 2. Допустимите стойности на израза $\frac{1}{a+2} - \left(\frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a-2}{a-1}$ са:

а) $a \neq \pm 1, \pm 2$; б) $a \neq \pm 1, -2$; в) $a \neq 1, -2$; г) друг отговор.

Зад 3. В Δ *ABC AM* е медиана, *G* е медицентър. Отношението на лицата $S_{GCM} : S_{ABM}$ е:

а) 1:1; б) 1:2; в) 1:3; г) друг отговор.

Зад 4. Броят на различните реални корени на уравнението $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ е:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Зад 5. Сумата на всички цели числа в интервала $[-\sqrt{1850}; \sqrt{2009}]$ е равна на:

а) 44; б) 159; в) 2009; г) друг отговор.

Зад 6. Допирните точки на вписаната окръжност със страните на триъгълник я разделят на дъги в отношение 5:6:7. Най-големият ъгъл на триъгълника е равен на е:

а) 60^0; б) 70^0; в) 80^0; г) друг отговор.

Зад 7. Корените на уравнението $x^2 - ax - 2009 = 0$ са цели числа. Броят на различните стойности на *a* е:

а) 6; б) 4; в) 2; г) друг отговор.

Зад 8. В Δ *ABC* точката *H* е ортоцентър. Отношението на ъглите $\angle ABH : \angle BCH : CAH =$ 2:3:4. Най-малкият ъгъл на триъгълника е равен на :

а) 40^0; б) 50^0; в) 60^0; г) друг отговор.

Зад 9. Реалното число $a \in (0;1)$ е такова, че $a + \frac{1}{a} = 11$. Стойността на $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$:

а) $\sqrt{11}$; б) $-\sqrt{11}$; в) 3; г) друг отговор.

Зад 10. *ABCD* ($AC \perp BD$, $AC \cap BD = O$) е трапец, вписан в окръжност. Средната основа е равна на 12, а основите се отнасят така: *AB : CD* = 2:1.

а) Намерете лицата на *ABCD*, *AOD* и *BOC*;

б) Ако *AD = p*, изразете чрез *p* дължината на отсечка *HM*, където $OH \perp AD$, $H \in AD$, а *M* е среда на *BC*.

Отговори 9 клас

1.А); **2.**Г $a \neq 1, \pm 2$; **3.**В); **4.**В); **5.**А); **6.**В); **7.**А) **8.**Б); **9.**Г(-3).

Упътвания и решения:

Зад 1. Първата права пресича Ox в точка $(-5; 0)$, замествайки във втората $\Rightarrow b = 10$.

Зад 3. От свойството на медицентъра $S_{CGM} : S_{AMC} = GM : AM = 1:3$, но $S_{ABM} = S_{AMC}$.

Зад 4. Ако положим $t = x^2 - 2x$, получаваме уравнението $t^2 - 2t - 3 = 0$ с корени 3 и -1. От тук се получават уравненията $x^2 - 2x + 1 = 0$ с двоен корен 1 и $x^2 - 2x - 3 = 0$ с корени 3 и -1.

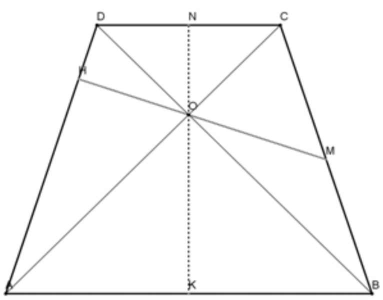
Зад 5. Целите числа в интервала са $\{-43, -42, ..., 42, 43, 44\}$. Очевидно сумата на всички, без последното, е нула.

Зад 6. От отношението на дъгите и ъгловата мярка на цялата окръжност $\Rightarrow$ $5x + 6x + 7x = 360^0 \Rightarrow x = 20^0 \Rightarrow$ дъгите и съответните им централни ъгли са 100^0, 120^0 и 140^0. От получените четириъгълници с върхове връх на триъгълника, две допирни точки и центъра на окръжността $\Rightarrow$ ъглите на триъгълника са 80^0, 60^0 и 40^0.

Зад 7. От формулите на Виет $x_1 x_2 = -2009$. $2009 = 7.7.41 \Rightarrow$ възможните целочислени двойки са (1, -2009), (7, -287), (49, -41), (41, -49), (287, -7) и (2009, -1). Стойностите на $a = x_1 + x_2$ са 6 (± 2008, ± 280, ± 8).

Зад 8. При стандартни означения за ъглите на Δ ABC от получените правоъгълни триъгълници от височините $\Rightarrow \alpha = 90^0 - 2x, \beta = 90^0 - 3x, \gamma = 90^0 - 4x$. От сбора на ъглите в Δ $ABC \Rightarrow 2x + 3x + 4x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0 \Rightarrow$ ъглите на Δ ABC са 70^0, 60^0 и 50^0.

Зад 9. Нека $A = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow A^2 = a - 2 + \frac{1}{a} = 11 - 2 = 9 \Rightarrow A = \pm 3$, но $A < 0 \Rightarrow A = -3$.



Зад 10. а) От окръжността трапеца е равнобедрен (**1т.**)**,** от отношението и средната основа $AB = 16$, $CD = 8$ (**1т.**) OK и ON са височини в равнобедрени правоъгълни триъгълници $\Rightarrow$ медиани $\Rightarrow$ са съответно 8 и 4, а цялата височина $KN = 12$ (**2т.**) $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{16+8}{2}.12 = 144$ (**1т.**) $\Delta AOD \cong \Delta BOC \Rightarrow$ имат равни лица (**2т.**) $S = \frac{S_{ABCD} - S_{ABO} - S_{COD}}{2} = \left(144 - \frac{16.8}{2} - \frac{8.4}{2}\right)\frac{1}{2} = 32$ (**1т.**)

Забележка: $S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC} = \sqrt{S_{AOB}.S_{COD}}$ за всеки трапец.

б) $\angle CBO = \angle BOM$ (OM медиана в правоъгълен триъгълник), $\angle CBO = \angle DAO$ (вписани ъгли или от еднаквите триъгълници), $\angle DAO = \angle DOH = 90^0 - \angle AOH \Rightarrow$ $\angle DOH = \angle BOM \Rightarrow M$, O и H лежат на една права, (**3т.**) $OM = \frac{BC}{2} = \frac{p}{2}$,(**1т.**) от лицето $S_{AOD} = \frac{AD.OH}{2} = 32 \Rightarrow OH = \frac{64}{p}$ (**2т.**)$\Rightarrow MH = \frac{p}{2} + \frac{64}{p} = \frac{p^2 + 64}{2p}$ (**1т**).

Стефчо Наков

Монтана