Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 12.12.2009 г.
8 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.
Организаторите Ви пожелават успех?

Име..училище..град...................................

1 зад. Ако $a = 6, b = 24$ и $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \sqrt{a.b}, z = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ определете вярната релация.

а) y<z<x; б) z<y<x; в) y<z<x; г) друг отговор

2 зад. Даден е равнобедрен трапец MNPQ с височина PH = 6 см и MH = 8 см. На колко е равно лицето на трапеца?

а) 24 кв.см; б) 48 кв.см; в) 64 кв.см; г) друг отговор

3 зад. За коя стойност на параметъра a неравенствата $\dfrac{x+3a}{4} \le x+1$ и $x \ge 1$ са равносилни?

а) $\dfrac{5}{3}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в)3; г) друг отговор

4 зад. Да се реши уравнението $|x-3| + x^2 + 9y^2 = 6xy$.

а) x=2 y=3; б) x=3 y=1 ; в) x=1 y=2; г) друг отговор

5 зад. Да се намери най-голямото естествено число, което е по-малко от числото $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

а) 7; б) 9; в) 11; г) друг отговор

6 зад. Квадратен обор с размери 3 м на 3 м е построен в ливада. На един ъгъл (от вън) е завързан кон с въже, дълго 4 м. Намерете лицето на максималната площ от ливадата, на която конят може да пасе.

а) 12 кв.м.; б) $\dfrac{22}{3}\pi$ кв.м; в) $\dfrac{25}{2}\pi$ кв.м; г) друг отговор

7 зад. За кои стойности на x и y се удовлетворява неравенството $x^2 + 2y^2 - 2xy - 6y + 10 > 0$?

а) при x>0,y>0; б) само когато x и y принадлежат на интервала $[0;1]$;

в) само при $x = 2y$; г) друг отговор

8 зад. Даден е четириъгълник $MNPQ$, за който $MN \| PQ$ и $\angle M = \angle P$. Точката A е такава, че $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}\right)$; точката B е такава, че $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$. Да се намери лицето на четириъгълника $MNBQ$, ако $S_{MNA} = 3$ кв.см.

а) 12 кв.см.; б) 18 кв.см.; в) 24 кв.см.; г) друг отговор

9 зад. Ако множеството от решенията на неравенството $\dfrac{4x+m}{3x+n} \le 0$ е интервалът $[-4,2)$, сборът $m+n$ е равен на**:**

а) 4; б) 8; в) 16; г) друг отговор

10 зад. Трапец се разделя от средната си основа на две части, чийто лица се отнасят както 2 : 3. Да се намери отношението на голямата и малката основа на трапеца.

Отговори: 1- б; 2- б; 3-г $\frac{7}{3}$; 4- б; 5- б; 6- в; 7- г –при всички стойност на x и y **; 8- б; 9- г 10.**

Решения:

1 зад. x=15, y=12, z=9.6 откъдето получаваме търсената релация.

2 зад. МН е средна отсечка в трапеца и S=8.6=48 кв.см;

3 зад. $\frac{x+3a}{4} \le x+1 \Rightarrow x+3a \le 4x+4 \Rightarrow 3a-4 \le 3x \Rightarrow x \ge \frac{3a-4}{3} \Rightarrow \frac{3a-4}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$.

4 зад. $|x-3| + x^2 + 9y^2 = 6xy \Rightarrow |x-3| + (x-3y)^2 = 0$ равенството е изпълнено само когато $x-3=0$ и $x-3y=0$, откъдето $x=3$ и $x=3y \Rightarrow y=1$.

5 зад. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = 5+2\sqrt{6}$ $4<6<9 \Rightarrow \sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9} \Rightarrow 2<\sqrt{6}<3$

емпирично установяваме, че $2,4<\sqrt{6}<2,5(2,4^2=5,76$ и $2,5^2=6,25$ $\Rightarrow 5+2\sqrt{6}>5+2.2,4=9,8 \Rightarrow$ търсеното число е 9.

6 зад. Лицето на търсената площ се състои от 3 части: I. $\frac{3}{4}$ от лицето на кръг с радиус дължината на въжето – 4 м (изключва се $\frac{1}{4}$ от този кръг, където е обора); II. $\frac{1}{4}$ от лицето на кръг с радиус 1 м (остатъка от въжето, опънато до едната стена на обора); III. $\frac{1}{4}$ от лицето на кръг с радус 1 м (опънато до другата стена на обора). Тогава:

$S = \frac{3}{4}.\pi.4^2 + \frac{1}{4}\pi.1^2 + \frac{1}{4}\pi.1^2 = 12\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{25}{2}\pi$ кв.м.

7 зад. $x^2+2y^2-2xy-6y+10>0$? $x^2+2y^2-2xy-6y+10 = x^2-2xy+y^2+y^2-6y+9+1 =$
$= (x-y)^2+(y-3)^2+1$ и тъй като $(x-y)^2 \ge 0$ за всички стойност на x и y; $(y-3)^2 \ge 0$ за всчки стойности на x и y; $1>0$ следва, че неравенството е изпълнено за всчки стойности на x и y.

8 зад. От $MN \| PQ$ и $\angle M = \angle P \Rightarrow MNPQ$ е успоредник. Точката A е пресечна точка на диагоналите. Точка B се намира на продължението на QP на разстояние $PB = QP \Rightarrow MNBP$ е успоредник с диагонал MB. Диагоналите MP и QN делят лицето на на четири равни части . Но $S_{NBP} = S_{MNP} = 2S_{MNA} \Rightarrow S_{MNBQ} = 6S_{MNA} = 6.3 = 18$ кв.см.

9 зад. I. $4x+m \ge 0$ **и** $3x+n<0 \Rightarrow x \ge -\frac{m}{4}; x < -\frac{n}{3} \Rightarrow -\frac{m}{4} \le x < -\frac{n}{3}$ **или** $x \in \left[-\frac{m}{4}; -\frac{n}{3}\right)$

II. $4x+m \le 0$ **и** $3x+n>0 \Rightarrow x \le -\frac{m}{4}; x > -\frac{n}{3} \Rightarrow -\frac{n}{3} < x \le -\frac{m}{4}$ **или** $x \in \left(-\frac{n}{3}; -\frac{m}{4}\right]$

От условието $[-4;2) \Rightarrow$ че е изпълнено **I** $\Rightarrow -\frac{m}{4} = -4 \Rightarrow m = 16; -\frac{n}{3} = 2 \Rightarrow n = -6 \Rightarrow 0$

$\Rightarrow m+n = 16+(-6) = 10$.

10 зад. Нека трапеца е $ABCD$ с голяма основа $AB = a$, малка основа $CD = b$ и средна основа $MN = m$. $S_1 = S_{ABNM} = \frac{a+m}{2}.h$ (h е равна на $\frac{1}{2}$ от височината на трапеца) **(2 т);**

$S_2 = S_{MNCD} = \frac{m+b}{2}.h$ **(2 т)** . Очевидно $S_2 < S_1 \Rightarrow S_2 : S_1 = 2:3 \Rightarrow \frac{m+b}{2}.h : \frac{a+m}{2}.h = 2:3$ **(1 т.)**

$\Rightarrow \frac{m+b}{a+m} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3m+3b = 2a+2m \Rightarrow m+3b = 2b$ **(5 т.)**,

но $m = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a=b}{2} + 3b = 2a \Rightarrow$ $a+b+6b = 4a \Rightarrow 7b = 3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ **(5 т.).**