<u>Секция "Изток" – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 08.12.2007г.

12 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>
<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име..училище........................град.....................

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат.
Задачите се оценяват с по 2 точки:

1 зад. Решенията на неравенството $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$ са от интервала:

а) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ б) $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$ в) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ г) $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$

2 зад. Ако $A = \sqrt[3]{\frac{25}{4}}$ и $B = \sqrt[5]{\frac{125}{8}}$, то е вярно, че:

а) $A = B$ б) $A > B$ в) $A < B$ г) не могат да се сравнят

3 зад. Решенията на уравнението $3x + |x| = 2$ са:

а) $0;\ 0,5$ б) 1 в) $0,5$ г) $0,5;\ 1$

4 зад. Корените на уравнението $8^{2x} - 8^{x+1} - 8^{x} + 8 = 0$ са:

а) $2;\ 4$ б) $1;\ 2$ в) $1;\ 3$ г) друг отговор

5 зад. Броят на реалните решения на системата $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 23 \\ xy = 1 \end{array}\right.$ е:

а) 1 б) 2 в) 3 г) друг отговор

6 зад. Корените на уравнението $log_8\left(1 - x^2\right) = 2\,log_{64}\,x$ са:

а) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ б) $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ в) $\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ г) друг отговор

7 зад. В ΔABC медианите AD и BE са взаимно перпендикулярни. Ако дължините на страните AC и BC са съответно *3 см* и *4 см*, то дължината на страната AB е равна на:

а) $\sqrt{15}$ б) $\sqrt{10}$ в) $\sqrt{5}$ г) друг отговор

8 зад. Радиусите на две пресичащи се окръжности са съответно *13 см* и *15 см*, а дължината на общата им хорда е *24 см*. Ако центърът на всяка от двете окръжности е външна точка за другата окръжност, то разстоянието между центровете е равно на:

а) *14 см* б) *28 см* в) *30 см* г) друг отговор

9 зад. За геометрична прогресия, състояща се от седем члена, сумата на първите три от тях е *0,875*, а сумата на последните три е равна на *14*. Четвъртият член на тази прогресия е равен на

а) 1 б) $-\frac{7}{3}$ в) 0 г) друг отговор

10 зад. Радиусът на окръжността, описана около ΔABC е *6 см*, $\sphericalangle A = 70^0$ и $\sphericalangle C = 80^0$. Дължината на ъглополовящата на $\sphericalangle C$ е равна на:

а) *4 см* б) *6 см* в) *10 см* г) друг отговор

11 зад. Трицифрено число е по-голямо от 500 и по-малко от 600. Ако то е 64 пъти по-голямо от сбора на цифрите си, то числото е:

а) *532* б) *521* в) *523* г) друг отговор

12 зад. Правоъгълен триъгълник има лице *116 см²*, а катетите му се отнасят както $3:7$. Височината към хипотенузата го разделя на два триъгълника. Лицата на тези триъгълници са равни на:

а) $18см^2$ и $98см^2$ б) $52см^2$ и $64см^2$ в) $33,8см^2$ и $82,2см^2$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише.
Задачите се оценяват с по 3 точки:

1 зад. Да се намерят корените на уравнението $sin^3 x - cos^3 x = sin^2 x - cos^2 x$ за $x \in \left(0^0 ; 60^0\right)$.

Отговор:..

2 зад. В правоъгълен триъгълник, периметърът на който е 36 см, е вписана окръжност.Допирната точка на окръжността с хипотенузата я дели в отношение $2 : 3$. Да се намери дължината на хипотенузата на триъгълника.

Отговор:..

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише решението.
Задачите се оценяват с по 10 точки:

1 зад. Да се реши уравнението $\sqrt{x-3} = \sqrt{6-x} - 1$.

2 зад. За кои стойности на реалният параметър p уравнението $(p-1)x^2 - 2px + p + 3 = 0$ има два реални корена, за които е вярно неравенството $x_1^2 + x_2^2 \geq 4$?

3 зад. Даден е квадрат *ABCD* със страна a, в който т. *N* е среда на *BC*, $M \in CD$ и $CM : MD = 2 : 1$. Да се намери лицето на петоъгълника, ограничен от правите *BC, CD, AN, AM* и *BD*.

Кратки решения и отговори
ПЪРВА ЧАСТ

1зад. $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$; $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{2-x}{2x-1} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2};2\right]$; Отг. б)

2зад. $A = \sqrt[3]{\frac{25}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{10}{15}}$; $B = \sqrt[5]{\frac{125}{8}} = \sqrt[5]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{9}{15}}$ след. $A > B$; Отг. б)

3зад. $3x + |x| = 2$; $|x| = 2 - 3x$. Ако $x \geq \frac{2}{3}$, уравнението няма решение, след. решение е само $x = \frac{1}{2}$. Отг. в)

4зад. $8^{2x} - 8^{x+1} - 8^x + 8 = 0$; $\left(8^x\right)^2 - 9 \cdot 8^x + 8 = 0$; $8^x = 1 = 8^0 \Rightarrow x = 0$; $8^x = 8 \Rightarrow x = 1$ Отг. г) 0; 1

5зад. $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 23 \\ xy = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \left(x+y\right)^2 = 25 \\ xy = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+y = 5 \\ xy = 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x+y = -5 \\ xy = 1 \end{vmatrix}$. Решенията са четири: $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ Отг. г) четири

6зад. $log_8^{\left(1-x^2\right)} = 2log_{64}^x$, DC: $x \in \left(0,1\right)$. Уравнението е еквивалентно на: $log_8^{\left(1-x^2\right)} = log_8^x$, т.е. $x^2 + x - 1 = 0$. От корените на това уравнение само $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ принадлежи на допустимите стойности.

7зад. Нека M е пресечната точка на медианите. Означаваме $AM = 2x;\ MD = x;\ BM = 2y;\ ME = y$. Тогава от Питагоровата теорема за правоъгълните триъгълници получаваме $AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = \sqrt{5}$. Отг. в)

8зад. Нека AB е общата хорда, OO_1 е разстоянието между центровете и $OO_1 \cap AB = M$. Тъй като $AB \perp OO_1$ и $AM = MB$, то от Питагоровата теорема и от правоъгълните триъгълници пресмятаме $OM = 5$ и $MO_1 = 9$, след. $OO_1 = 14$. Отг. а)

9зад. От условието и свойствата на геометричната прогресия получаваме $\begin{vmatrix} a_1\left(1+q+q^2\right) = 0,875 \\ a_1q^4\left(1+q+q^2\right) = 14 \end{vmatrix}$, от където $q = \pm 2$ и съответно намираме $a_4 = -\frac{7}{3}$ и $a_4 = 1$. Отг. г)

10зад. ΔACL е равнобедрен и $AC = CL$. От синусова теорема за ΔACL намираме $AC = 6см$. Отг. б)

11зад. Ако числото е $\overline{abc}$, то очевидно е, че $a = 5$. Тогава от условието получаваме $6b + 7c = 20$, от където $b = 1,\ c = 2$ Отг. г) 512

12зад. Правоъгълните триъгълници, получени от височината към хипотенузата, са подобни. Тогава $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{49}$, от където намираме $S_1 = 18см^2$ и $S_2 = 98см^2$. Отг. а)

ВТОРА ЧАСТ

1зад. $sin^3 x - cos^3 x = sin^2 x - cos^2 x$ за $x \in \left(0^0; 60^0\right)$. Преобразуваме уравнението и получаваме

$$\left(sin\,x - cos\,x\right)\left(sin^2 x + sin\,x\,cos\,x + cos^2 x\right) = \left(sin\,x - cos\,x\right)\left(sin\,x + cos\,x\right)$$

$$\left(sin\,x - cos\,x\right)\left(1 - cos\,x - sin\,x\left(1 - cos\,x\right)\right) = 0$$

$$\left(sin\,x - cos\,x\right)\left(1 - cos\,x\right)\left(1 - sin\,x\right) = 0$$

$sin\,x = cos\,x$ $\qquad$ $cos\,x = 1$ $\qquad$ $sin\,x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} \in \left(0^0; \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ решенията на тези уравнения не принадлежат на дадения интервал

2зад. Ако допирните точки на окръжността със страните на триъгълника са съответно M, N и P, означаваме $AM = AP = 2x$, $MB = BN = 3x$, $CP = CN = r$ и от системата $\begin{vmatrix} r + 5x = 18 \\ \left(r + 2x\right)^2 + \left(r + 3x\right)^2 = 25x^2 \end{vmatrix}$ намираме $x_1 = -18;\ x_2 = 3$. Тъй като $AB = 5x$ е дължина на отсечка, то $AB = 15$.

ТРЕТА ЧАСТ

1зад. Определяме ДМ: $3 \le x \le 6$

$\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{6-x} \uparrow^2$ $\qquad$ ………………………..

$\sqrt{x-3} = 4 - x \uparrow^2$ и допълваме ДМ: $3 \le x \le 4$ ....

$x_1 = \dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$, не е решение и $x_2 = \dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$ е решение.

2зад. $p \ne 1$

$D = -2p + 3 \ge 0 \Rightarrow p \le 3/2$

…… $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{-2p^2 + 4p + 2}{(p-1)^2} \ge 0$

…….Отговор $p \in [1-\sqrt{2}; 1) \cup (1; 3/2]$

3 зад. $S_{KPNCM} = S_{ANCM} - S_{ACP} = \dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{5a^2}{24} = \dfrac{9a^2}{24}$