**Секция "Изток" – СМБ**

**КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 8.12.2007 г.**

**10 клас**

**Времето за решаване е 120 минути.**

**Регламент:** Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

**Организаторите Ви пожелават успех!**

Име.......................................................училище.......................................град.....................

**Зад 1.** Стойността на израза $\left(5\sqrt{72}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}\right):\left(4\sqrt{3}\right)$ е:

а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$; в) $3\sqrt{6}$; г) друг отговор.

**Зад 2.** Катетът и хипотенузата в правоъгълен триъгълник имат дължини съответно 6см и 8 см. Дължината на височината към хипотенузата е:

а) $3\sqrt{7}$ см; б) $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$ см; в) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ см; г) друг отговор.

**Зад 3.** Ако $\alpha$ е остър ъгъл и $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, то стойността на $\sin\alpha . tg\alpha$ е:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; г) друг отговор.

**Зад 4.** Множеството от решенията на неравенството $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}\geq 0$ е:

а) $(-\infty,-3]\cup[2,\infty)$; б) $(-\infty,3)\cup[2,\infty)$; в) $[-3,2]$; г) друг отговор.

**Зад 5.** Ако $x_1$ и $x_2$ са корени на уравнението $\sqrt{3}x^2-x-1=0$, то $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ е равно на:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-6}{9}$; б) $-\dfrac{6+\sqrt{3}}{9}$; в) $-\dfrac{\left(2\sqrt{3}+1\right)}{3}$; г) друг отговор.

**Зад 6.** Произведението от корените на уравнението $\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x}-\sqrt{2x+3}$ е:

а) $\dfrac{9}{4}$; б) $-\dfrac{9}{4}$; в) $\dfrac{3}{2}$; г) друг отговор.

**Зад 7.** Ако $x^2-7xy+12y^2=0$ и $x$ и $y$ са отрицателни числа, то $\dfrac{x-y}{x+y}$ е равно на:

а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{3}{5}$; в) $\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{3}{5}$; г) друг отговор.

**Зад 8.** Точките *M* и *N* са съответно от страните *BC* и *CD* на успоредника *ABCD*. Ако *M* е среда *BC, a* отношението *CN:ND* = 2:3 и *O* е пресечната точка на *AM* и *BN*, то отношението *AO:AM* е:

а) $2:3$; б) $5:6$; в) $1:5$; г) друг отговор.

**Зад 9.** Ако $\sqrt{\left(x^2-3\right)^2}+\left|\dfrac{2x}{a}+2\right|+\left(\dfrac{3x+3\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$, то стойността на $a-x$ е:

а) $-2\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; в) 0; г) друг отговор.

**Зад 10.** Медицентърът на равнобедрения триъгълник *ABC (AC=BC*), лежи на вписаната му окръжност. Да се намери периметъра на на триъгълника, ако *AB*=10см.

## Отговори 10 клас

**1.**б); **2.**в); **3.**а); **4.**г) $(-\infty,-3]\cup[2,5)\cup(5,\infty)$; **6.**в); **5.**б); **7.**в); **8.**б); **9.**г) $2\sqrt{3}$.

**Решения:**

**Зад 1.** $\left(5\sqrt{72}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}\right):\left(4\sqrt{3}\right)=\left(30\sqrt{2}-6\sqrt{2}-12\sqrt{2}\right):\left(4\sqrt{3}\right)=\dfrac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

**Зад 2.** От Питагоровата теорема за дадения триъгълник следва, че другият катет има дължина $2\sqrt{7}$ см. Тогава височината към хипотенузата има дължина $\dfrac{6.2\sqrt{7}}{8}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ см.

**Зад 3.** $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогава $\sin\alpha.tg\alpha=\sin^2\alpha\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

**Зад 4.** Ясно е, че даденото неравенство е еквивалентно на $\left|\begin{array}{l}x\neq 5\\ (x-2)(x+3)\geq 0\end{array}\right.$

Следователно $x\in(-\infty,-3]\cup[2,5)\cup(5,\infty)$.

**Зад 5**. От формулите на Виет следва, че $\left|\begin{array}{l}x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ x_1x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$

Тогава $x_1^{\,3}x_2+x_1x_2^{\,3}=x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)=x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=-\dfrac{6+\sqrt{3}}{9}$

**Зад 6.** Уравнението $\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x}-\sqrt{2x+3}$ е еквивалентно на системата

$\left|\begin{array}{l}2x-3\geq 0\\ 2x+3\geq 0\\ 4x\geq 0\\ \left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(\sqrt{4x}\right)^2\end{array}\right.$ Следователно $\left|\begin{array}{l}x\geq\dfrac{3}{2}\\ x\geq-\dfrac{3}{2}\\ x\geq 0\\ \sqrt{4x^2-9}=0\end{array}\right.$ и решение на тази система е $x=\dfrac{3}{2}$, което е решение и на даденото уравнение.

**Зад 7.** Ясно е, че $y$=0 не е решение. Тогава уравнението $x^2-7xy+12y^2=0$ е еквивалентно на $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-7\dfrac{x}{y}+12=0$. Ако положим $\dfrac{x}{y}=z$, то от $z^2-7z+12=0$ следва,че $z=3$ или $z=4$.

Следователно $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{\dfrac{x}{y}+1}=\dfrac{z-1}{z+1}$. Тогава при $z=3$ отговорът е $\dfrac{1}{2}$, а при $z=4$ е $\dfrac{3}{5}$.

**Зад 8.** Нека точка $R$ е от отсечката $BN$ такава, че $MR$ е успоредна на $CD$. Ако означим $CN=2k$, то $ND=3k$ и $AB=5k$. $MR$ е средна отсечка в триъгълник $NBC$ и $MR$=к. От $\triangle ABO \sim \triangle MRO$ следва, че $\frac{AB}{MR}=\frac{AO}{MO}=\frac{5k}{k}=\frac{5}{1}$. Следователно $AO:AM$=5:6.

**Зад 9.** Тъй като всяко от събираемите от лявата част на уравнението е по-голямо или равно на нула, то за да има решение трябва и трите да са 0 т.е. $\sqrt{\left(x^2-3\right)^2}=\left|x^2-3\right|=\left|\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\right|=0$, $\left|\frac{2x}{a}+2\right|=\frac{2}{|a|}|x+a|=0$ и $\left(\frac{3x+3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\left(x+\sqrt{3}\right)^2=0$. От първото и третото равенство следва, че $x=-\sqrt{3}$, а от второто $x=-a$. Тогава $a=\sqrt{3}$ и $a-x=\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$ .

**Зад 10.** Нека точките $E$, $M$ и $O$ са съответно средата на $AB$, медицентърът и центърът на вписаната окръжност за триъгълник $ABC$. От AC=BC следва, че $M$ и $O$ са от медианата $CE$. Тогава $CM:ME$=2:1 и $MO=OE$, откъдето следва, че $CO:OE$=5:1**.** Тъй като O е пресечна точка на ъглополовящите в триъгълник $ABC$, то като приложим свойството на ъглополовящите за триъгълник $AEC$ ще получим, че $AE:AC=EO:OC$=1:5. Но AE=5см и тогава $AC$=25см. Следователно $P_{ABC}=10+25+25=60 см$ .