**Секция "Изток" – СМБ**

**КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 9.12.2006 г.**

**9 клас**

**Времето за решаване е 120 минути.**

**Регламент:** Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

**Организаторите Ви пожелават успех!**

Име.........................................................училище........................................град.....................

**Зад 1.** Равнобедрен трапец $ABCD$ е описан около окръжност и бедрото $BC = 13$см . На колко е равна средната основа на трапеца ?

а)10; б)15; в)13; г) друг отговор.

**Зад 2.** Коя дроб е тъждествено равна на израза $A = \left(\frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) : \frac{x}{1-x^2}$ :

а) $\frac{3x+1}{1+x}$; б) $\frac{3x-1}{x-1}$; в) $\frac{3x+2}{1-x}$; г) друг отговор.

**Зад 3.** Иван и Петър се подготвят за коледно математическо състезание. Ако решават заедно задачите за подготовката, ще ги решат за 12 дни. За колко дни всеки сам може да реши определените задачи, ако за 1 ден Петър решава 50% от задачите, които Иван решава за 3 дни?

а) 25 и 35; б) 25 и 30; в) 30 и 20; г) друг отговор.

**Зад 4.** Да се сравнят изразите $A$ и $B$, където $A = \sqrt{63} + \left(2-\sqrt{7}\right)\sqrt{7} + \sqrt{17^2 - 8^2} - \sqrt{(-2)^6}$ и $B = 2\sqrt{41}$ :

а) $A < B$; б) $A = B$; в) $A \le B$ ; г) друг отговор.

**Зад 5.** Ако $a\nabla b = a + \frac{ab}{a-b}$ , то колко е стойността на $a\nabla(b\nabla a)$ :

а) $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - ab + b^2}$; б) $\frac{a^2 - a\ b}{a^2 + ab + b^2}$; в) $\frac{a^2 b - a}{ab}$ ; г) друг отговор.

**Зад 6.** Даден е $\Delta ABC$ със среди на страните $AB$ -точка $C_1$ , на $AC$ - т. $B_1$, $BC$ - т. $A_1$. Ако $\overrightarrow{CA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB_1} = \vec{b}$, то на колко е равен $\overrightarrow{C_1M}$ , където $M$ е медицентър на триъгълника :

а) $\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; б) $-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; г) друг отговор.

**Зад 7.** Дядо Коледа е възложил на 2 джуджета всяко от тях да направи определен брой подаръци. Ако I направи 50% от заявката си, а II – 55% от своята, то те ще направят общо 265 подаръка. Ако I направи 55% от заявката си, а II – 50% от своята, то те ще направят общо 260 подаръка. Колко подаръка е трябвало да направи II джудже само?

а) 280; б) 250; в) 300; г) друг отговор.

**Зад 8.** В $\Delta ABC$ отсечката $BL$ е ъглополовяща (т. $L \in AC$ ).Описаната около $\Delta BLC$ окръжност пресича страната $AB$ в т. $P$, а описаната около $\Delta ABL$ окръжност пресича страната $BC$ в т. $Q$. Ако $\angle LBQ = 35°$ и $\angle LQC = 60°$ , то на колко ще е равен $\angle APL$ ?

а) $50°$; б) $60°$ ; в) $70°$; г) друг отговор.

**Зад 9.** Да се определят стойностите на параметъра $m$ , за който корените на уравнението $x^2 - (2m-3)x + 2 = 0$ са реални и удовлетворяват условието $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$:

а) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{2}$; б) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{5}{2}$; в) $\frac{1}{4}$ и $-5$; г) друг отговор.

**Зад 10.** Правоъгълникът $ABCD$ е разделен на 3 еднакви квадрата чрез отсечките $MN$ и $PQ$ ($M$ и $P \in AB$, $N$ и $Q \in CD$). Да се пресметне градусната мярка на $\angle AMD + \angle AQD + \angle ACD = ?$

## Отговори 9 клас

**Отговори: 1-в; 2-г $\frac{3x-1}{1-x}$ ; 3-в; 4-г $A > B$; 5-а; 6-б; 7-в; 8-а; 9-г $-\frac{1}{2}$ .**

**Решения :**

Задача 1. $ABCD$ описан около $к$ $\Rightarrow AB+CD=AD+BC$ , $BC=AD=13см$

$\Rightarrow MN=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}.26=13см$

Задача 2. $A=\left(\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right):\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{x(x+1)+(x-1)(x+1)+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.\frac{(x+1)(x-1)}{x}=$

$=\frac{x^2+x+x^2-1+x^2-2x+1}{x-1}.\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-x}{x-1}.\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{x(3x-1)}{x-1}.\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3x-1}{1-x}$

Задача 3. $x$- дните на Иван $\Rightarrow$ за 1 ден -$\frac{1}{x}$ от задачите. Петър за 1 ден 50% от $3.\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.\frac{1}{x}$

$\Rightarrow 12.\frac{1}{x}+12.\frac{3}{2}.\frac{1}{x}=1\Rightarrow x=30$ . Петър $\frac{3}{2}.\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$ за 1 ден $\Rightarrow$ за 20 дни са решени задачите от Петър.

Задача 4. $A=\sqrt{9.7}+2\sqrt{7}-\sqrt{7}^2+\sqrt{(17-8)(17+8)}-\sqrt{2^6}=3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-7+\sqrt{9.25}-2^3=\ 5\sqrt{7}-7+3.5-8=$

$=5\sqrt{7}==\sqrt{25.7}=\sqrt{175}$ ; $B=2\sqrt{41}=\sqrt{4.41}=\sqrt{164}$ ; 164<175 $\Rightarrow$ A>B.

Задача 5 . $b\nabla a=b+\frac{ba}{b-a}=\frac{b^2-ab+ab}{b-a}=\frac{b^2}{b-a}$ ; $a\nabla(b\nabla a)=a+\frac{a.\frac{b^2}{b-a}}{a-\frac{b^2}{b-a}}=a+\frac{a.\frac{b^2}{b-a}}{\frac{ab-a^2-b^2}{b-a}}=$

$=a+\frac{ab^2}{ab-a^2-b^2}=\frac{a^2b-a^3-ab^2+ab^2}{ab-a^2-b^2}=\frac{-(a^3-a^2b)}{-(a^2-ab+b^2)}=\frac{a^3-a^2b}{a^2-ab+b^2}$ .

Задача 6. $\overrightarrow{CB}=2\vec{a};\overrightarrow{CA}=2\vec{b};\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(2\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$ ; $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

Задача 7. $x$-подаръците на I джудже, $y$-подаръците на II джудже ;

$\left|\begin{array}{l}50\%\ от\ x+55\%\ от\ y=265\\55\%\ от\ x+50\%\ от\ y=260\end{array}\right.$ ; $\left|\begin{array}{ll}10x+11y=5300 & |.11\\11x+10y=5200 & |.10\end{array}\right.$ ; $y$=300.

Задача 8 . $\angle ABC=2.35^\circ=70^\circ$. Четириъгълникът $PBCL$ е вписан в окръжност. $\Rightarrow\angle BPL+\angle BCL=180^\circ$ и $\angle APL+\angle BPL=180^\circ\Rightarrow\angle APL=\angle C$. Четириъгълникът $ABQL$ е вписан в окръжност .

$\Rightarrow\angle BAC+\angle BQL=180^\circ$ и $\Rightarrow\angle CQL+\angle BQL=180^\circ$ $\Rightarrow\angle A=\angle LQC=60^\circ$

$\Rightarrow\angle APL=\angle C=180^\circ-(70^\circ+60^\circ)=50^\circ$

Задача 9. $\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}+\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=1$ ; $\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}+\frac{(x_2+x_1)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=1$; $\frac{2m-3}{2}+\frac{(2m-3)^2-2.2}{4}=1$;

$2(2m-3)+(2m-3)^2-4=4$ ; $4m^2-8m-5=0$; $D=144$; $m_1=\frac{8+12}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$; $m_2=\frac{8-12}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$. При 5/2, уравнението няма реални корени.

Задача 10. За правилен чертеж – 1т. $\angle AMD=45^\circ$ -диагонал в квадрат-1т. Построяване $ABC_1D_1$ - правоъгълник, симетричен на ABCD относно правата AB – 3т, точка $Q_1$ - симетрична на т.Q спрямо AB – 2т. Свързват се т.А с т. $Q_1$ и т. $Q_1$ с т.С. $\angle AQD=\angle AQ_1D_1=\alpha$ -2т. $\Rightarrow\angle D_1AQ_1=90^\circ-\alpha$ , $\Delta AQ_1D_1\cong\Delta Q_1CC_1$ $\Rightarrow AQ_1=Q_1C$ -2т.; $\angle CQ_1C_1=90^\circ-\alpha$ и $\angle C_1CQ_1=\alpha\Rightarrow\angle AQ_1C=90^\circ$ $\Rightarrow\angle CAQ_1=\angle ACQ_1=45^\circ$ - 2т. ;

$\Rightarrow\angle ACD=90^\circ-(45^\circ+\alpha)=45^\circ-\alpha$ $\Rightarrow\angle AMD+\angle AQD+\angle ACD=45^\circ+\alpha+45^\circ-\alpha=90^\circ$ - 2т.

Автори на задачите : Нели и Николай Сиракови гр. Ботевград