<u>Секция “Изток” – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 9.12.2006 г.

8 клас

<u>Времето за решаване е 120 минути.</u>

<u>Регламент:</u> Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

<u>Организаторите Ви пожелават успех!</u>

Име...училище.......................................град.....................

1 зад. Да се намерят $\angle A$ и $\angle C$ на ΔABC, ако $\angle B = 70^\circ$ и ъглополовящата на външен ъгъл на триъгълника при върха С образува с лъча АВ ъгъл 20°.

а) $30^\circ, 80^\circ$; б) $40^\circ, 70^\circ$; в) $50^\circ, 60^\circ$; г) друг отговор

2 зад. Намерете А от равенството: $\frac{a-b}{a^6-b^6}.\left(a^2-b^2\right)=\frac{A}{a^4+a^2b^2+b^4}:(a+b)$.

а) 1; б) a^2+b^2; в) a^2-b^2; г) друг отговор

3 зад. Даден е равнобедрен ΔABC с бедра АС и ВС, равни на 12 см. В триъгълника е вписан успоредник така, че един от ъглите му съвпада с $\angle C$. Намерете периметъра на успоредника.

а) 28 см; б) 24 см; в)18 см; г) друг отговор

4 зад. Приведете в нормален вид израза: $\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

а) x^8-x^4-1; б) x^8-1; в) x^8+x^4+1; г) друг отговор

5 зад. Ъглополовящата на един от ъглите на успоредник го разделя на две фигури, чийто периметри се различават с 2 см. Ако периметърът на успоредника е 26 см, намерете дължината на по-голямата страна на успоредника.

а) 3 см; б) 4 см; в) 5 см; г) друг отговор

6 зад. Намерете сбора на естествените числа, които са общи решения на неравенствата:

$\frac{x+1}{2}-\frac{x-10}{3}>2x-9$ и $\frac{x-5}{3}-2x<x-9$.

а) 10; б) 14; в) 2; г) друг отговор

7 зад. Височината на равнобедрен трапец е равна на половината от разликата на основите му. Намерете ъгъла, заключен между продължението на бедрата му.

а) 90°; б) 60°; в) 80°; г) друг отговор

8 зад. Решете уравнението $(2x-a)(2a-x)=(ax-1)(a+x)+ax^2+1$, ако се знае, че е от първа степен.

а) 1; б) 2; в) - 1; г) друг отговор

9 зад. Да се определи най-малката стойност на израза $x^2+2xy+2y^2+2x+4y+3$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) друг отговор

10 зад. Да се намери петцифрено число, което е два пъти по голямо от произведението на числата, образувани от първите две цифри и от последните три цифри на петцифреното число (подредени в същия ред).

Решения 8 клас

Отговори: 1а; 2в; 3б; 4в; 5г–7 см; 6в; 7а; 8г $-\dfrac{4}{5}$; 9а.

Решения:

1 зад. Ъглополовящата на външния ъгъл при върха С пресича АВ в точка М, като $\angle AMC = 20°$. Тогава $\angle CBM = 110°$ и $\angle BCM = 50°$, откъдето външният ъгъл при върха С е равен на $100°$ и $\Rightarrow$ $\angle C = 80°$, $\angle A = 30°$

2 зад. $\dfrac{a-b}{a^6-b^6}.(a^2-b^2) = \dfrac{A}{a^4+a^2b^2+b^4} : (a+b)$ А $= \dfrac{a-b}{a^6-b^6}.(a^2-b^2).(a^4+a^2b^2+b^4).(a+b) =$
$\dfrac{(a-b)(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)(a+b)}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)} = a^2-b^2$

3 зад. Дължината на бедрото на триъгълника е равна на сбора на две съседни страни на успоредника, следователно периметърът на успоредника е равен на 24 см.

4 зад.
$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)=(x^2+1-x)(x^4-x^2+1)(x^2+1+x)=\left[(x^2+1)^2-x^2\right](x^4-x^2+1)=$
$(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+1)^2-(x^2)^2 = x^8+2x^4+1-x^4 = x^8+x^4+1$

5 зад. Нека голямата страна на успоредника ABCD AB=CD=b, а малката AD=BC=a. Тогава $2a+2b=26 \Rightarrow a+b=13$ см. Ъглополовящата на $\angle A$ пресича CD в точка М, като разделя успоредника на триъгълник AMD и четириъгълник ABCM. Тогава $P_{AMD} = a+a+AM$, $P_{ABCM} = a+b+b-a+AM$ и $P_{AMD}+2 = P_{ABCM}$ $\Rightarrow a+a+AM+2 = a+b+b-a+AM \Rightarrow 2a+2=2b \Rightarrow 2b=14 \Rightarrow b=7$ см

6 зад. x<7 и x>2,75 $\Rightarrow$ 3+4+5+6=18

7 зад. Нека е даден равнобедрен трапец ABCD с голяма основа $AB=a, CD=b$, като височината $DH = \dfrac{a-b}{2}$. Но $AH = \dfrac{a-b}{2}$ (понеже трапецът е равнобедрен). Тогава ΔAHD е равнобедрен правоъгълен $\angle A = 45°$ и $\angle ADH$=45° $\Rightarrow$ $\angle B = 45°$, откъдето търсеният ъгъл е равен на $90°$.

8 зад. Разкриваме скобите и преобразуваме:
$4ax-2a^2-2x^2+ax = a^2x-a+ax^2-x+ax^2+1 \Rightarrow -2(a+1)x^2+5ax+x-2a^2+a-1-a^2x=0$ Понеже уравнението е от първа степен $\Rightarrow$ $a+1=0 \Rightarrow a=-1$. Заместваме: $-5x-4=0 \Rightarrow x=-\dfrac{4}{5}$

9 зад. $x^2+2xy+2y^2+2x+4y+3=(x+y+1)^2+(y+1)^2+1 \Rightarrow$ при $y=-1$ и $x=0$ стойността на израза е най-малка, като е равна на 1**.**

10 зад. Нека числото е $\overline{abcde}$. Тогава $\overline{abcde} = 2\overline{ab}.\overline{cde} \Rightarrow 1000.\overline{ab}+\overline{cde} = 2\overline{ab}.\overline{cde} \Rightarrow$
$1000.\overline{ab} = (2.\overline{ab}-1)\overline{cde}$. $2.\overline{ab}-1$ дели $1000.\overline{ab} = 500.2\overline{ab}$ $2.\overline{ab}$ и $2.\overline{ab}-1$ са взаимно прости $\Rightarrow$
$2.\overline{ab}-1$ дели 500 $\Rightarrow$ $2.\overline{ab}-1$ е 25 или 125 $\Rightarrow$ $\overline{ab}$=13 или $\overline{ab}$=63.
От $1000.\overline{ab} = (2.\overline{ab}-1)\overline{cde} \Rightarrow 13000 = 25.\overline{cde} \Rightarrow \overline{cde}=520 \Rightarrow \overline{abcde}$=13520
63000=125. $\overline{cde} \Rightarrow \overline{cde}=504 \Rightarrow \overline{abcde}$=63504