

Секция “Изток” – СМБ
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2005 г.
8 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех?

Име.....училище.....град.....

1 зад. Пет ловци застреляли общо 14 заека. Ако всеки е застрелял поне 1 заек, кое от следните твърдения със сигурност е вярно?

- а) някой е убил точно 3 заека; б) някой е убил повече от 3 заека;
в) някой е убил по-малко от 3 заека; г) друг отговор

2 зад. На класна работа по геометрия са дадени 2 задачи. Класът се състои от 26 ученика. От тях 17 са решили първата задача, 16 са решили втората и 3 не са решили нито една задача. Колко ученика са решили двете задачи?

- а) 10; б) 23; в) 17; г) друг отговор

3 зад. Коя точка е на равни разстояния от три прави, лежащи в една равнина, неминаващи през една точка и всеки две пресичащи се?

- а) пресечната точка на симетралите; б) пресечната точка на медианите;
в) няма такава точка; г) друг отговор

4 зад. Какъв е броят на целите числа ($1 \leq x \leq 100$), за които е изпълнено $x^2 + x^3$ да бъде точен квадрат на цяло число?

- а) 7; б) 10; в) 12; г) друг отговор

5 зад. Да се определи стойността на израза $\left[\frac{2}{x} - \left(x + \frac{16}{x+4} \right) : \frac{x^3 - 64}{4+x} \right] \cdot \frac{4-x}{2}$ за $x = 2,5$.

- а) 1,1; б) 1,5; в) 2; г) друг отговор

6 зад. За кои стойности на аргумента x изразът $x^2 + 2x + 3$ достига най-малката си стойност?

- а) 7; б) 10; в) 12; г) друг отговор

7 зад. Изчислете $x_1^3 + x_2^3$, ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 2x - 9 = 0$.

- а) 76; б) 62; в) $6\sqrt{10}$; г) друг отговор

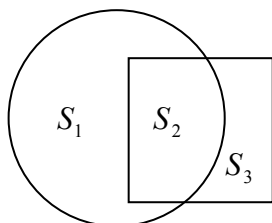
8 зад. Сборът от годините на баща, майка и син е 110. Годините на бащата преди 5 години са три пъти повече от сегашните години на сина. След 15 години майката ще бъде два пъти повъзрастна от сина си. На колко години ще бъде майката след 5 години?

- а) 45; б) 50; в) 56; г) друг отговор

9 зад. Пресметнете стойността на израза $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$:

- а) 12; б) $\sqrt{147}$; в) 10; г) друг отговор

10 зад. Лицето на пресичащи се кръг и квадрат са съответно 85% и 60% от лицето на обединението им (общата фигура, образувана при пресичането). Колко процента от лицето на квадрата е вън от кръга?



Забележка: Лицето на кръга извън квадрата означаваме с S_1 , лицето на сечението (общата част) на квадрата и кръга – с S_2 , а лицето на квадрата извън кръга – с S_3 .

8 клас

Отговори: 1 в; 2 а; 3 г – пресечната точка на ъглополовящите; 4 г - 8; 5 а; 6 г - $x = -1$; 7 б; 8 б; 9 в.

Решения:

1 зад. При деление на 14 с 5 получаваме частво 2 и остатък 4, поради което със сигурност е вярно твърдението: "Някой е убил по-малко от 3 заека".

2 зад. $26 - 3 = 23$ ученици са решили задачи. Всички решени задачи са $17 + 16 = 33$. Следователно 10 ученика ($33 - 23$) са решили и двете задачи.

3 зад. При пресичането на три прави, отговарящи на условието на задачата, се образува триъгълник. Пресечната точка на ъглополовящите на ъглите на този триъгълник е на равни разстояния от страните на триъгълника, т.е. и от правите.

4 зад. $x^2 + x^3 = x^2(1+x)$ За да бъде изразът точен квадрат на естествено число е необходимо $1+x = a^2$, където a е естествено число, или $x = a^2 - 1$. В интервала (1;100) се съдържат (освен 1) числата 4, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100, т.е. числата x са 3, 15, 24, 35, 48, 63, 80 и 99 (8 на брой).

5 зад.
$$\left[\frac{2}{x} - \left(x + \frac{16}{x+4} \right) : \frac{x^3 - 64}{4+x} \right] \cdot \frac{4-x}{2} = \left[\frac{2}{x} - \frac{x^2 + 4x + 16}{x+4} : \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{4+x} \right] \cdot \frac{4-x}{2} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-4} \right) \cdot \frac{4-x}{2} =$$
$$= \frac{2x - 8 - x}{x(x-4)} \cdot \frac{4-x}{2} = \frac{8-x}{2x} \quad \text{при } x=2,5 \quad \frac{8-2,5}{2 \cdot 2,5} = \frac{5,5}{5} = 1,1$$

6 зад. За $x = -1$ изразът достига най-малката си стойност, равна на 2.

7 зад. Корените на уравнението $x^2 - 2x - 9 = 0$ са $x_1 = 1 + \sqrt{10}$, $x_2 = 1 - \sqrt{10}$, откъдето

$$x_1^3 + x_2^3 = (1 + \sqrt{10})^3 + (1 - \sqrt{10})^3 = 1 + 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 + 10\sqrt{10} + 1 - 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 - 10\sqrt{10} = 62$$

$$\left(\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} \right)^2 + 2\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} \cdot \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \left(\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} \right)^2 =$$

$$27 + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{(27 + 10\sqrt{2})(27 - 10\sqrt{2})} + 27 - 10\sqrt{2} = 54 + 2\sqrt{27^2 - 10^2 \cdot 2} = 54 + 2\sqrt{529} = 54 + 46 = 100, \text{ от}$$

където стойността на израза е равна на 10.

8 зад. Нека годините на бащата са x , на майката - y и на сина - z . Тогава от условията:

$$x + y + z = 110 \quad /1/ \quad x - 5 = 3z \quad /2/ \quad y + 15 = 2(z + 15) \quad /3/$$

Като се съберат /2/ и /3/, се получава $x + y = 5z + 20$ и след заместването му в /1/

$$5z + 20 + z = 110 \quad \text{или} \quad z = 15, y = 45, x = 50. \text{ Годините на майката са 45 и след 5 години тя ще}$$

бъде на 50 години.

9 зад. Корените на уравнението $x^2 - 2x - 9 = 0$ са $x_1 = 1 + \sqrt{10}$, $x_2 = 1 - \sqrt{10}$, откъдето

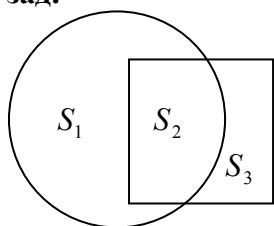
$$x_1^3 + x_2^3 = (1 + \sqrt{10})^3 + (1 - \sqrt{10})^3 = 1 + 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 + 10\sqrt{10} + 1 - 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 - 10\sqrt{10} = 62$$

$$\left(\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} \right)^2 + 2\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} \cdot \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \left(\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} \right)^2 =$$

$$27 + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{(27 + 10\sqrt{2})(27 - 10\sqrt{2})} + 27 - 10\sqrt{2} = 54 + 2\sqrt{27^2 - 10^2 \cdot 2} = 54 + 2\sqrt{529} = 54 + 46 = 100, \text{ от}$$

където стойността на израза е равна на 10.

10 зад.



Нека лицето на кръга извън квадрата е S_1 , лицето на сечението (общата част) на квадрата и кръга е S_2 , а лицето на квадрата извън кръга е S_3 .

Лицето на обединението е $S_1 + S_2 + S_3$, лицето на кръга е $S_1 + S_2$, а

лицето на квадрата е $S_2 + S_3$. По условие $S_{KP} = S_1 + S_2 = 85\%(S_1 + S_2 + S_3)$,

$$S_{KB} = S_2 + S_3 = 60\%(S_1 + S_2 + S_3).$$

$$\frac{S_{KP}}{S_{KB}} = \frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3} = \frac{85\%(S_1 + S_2 + S_3)}{60\%(S_1 + S_2 + S_3)} = \frac{85}{60} = \frac{17}{12} \quad S_{KP} = \frac{17}{12} \cdot S_{KB} \quad 5 \text{ т.}$$

$$S_1 + S_2 = 85\%S_1 + 85\%S_2 + 85\%S_3$$

$$15\%S_1 + 15\%S_2 = 85\%S_3$$

$$0,15(S_1 + S_2) = 0,85S_3$$

$$0,15S_{KP} = 0,85S_3 \quad 5 \text{ т.}$$

$$0,15 \cdot \frac{17}{12} \cdot S_{KB} = 0,85 \cdot S_3 \quad S_3 = \frac{17}{12} \cdot \frac{0,15}{0,85} \cdot S_{KB} = \frac{1}{4} \cdot S_{KB}$$

т.е. $\frac{1}{4}$ или 25% от лицето на квадрата е вън от кръга (това е S_3). 5 т.