ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

3 септември 2008 г. – <u>Вариант 2</u>

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака ╳ кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А ~~Б~~ В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А ● ~~В~~ Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака ╳ .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълнете решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачи от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. На колко е равна стойността на израза $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$?

А) 0 **Б)** $-2\sqrt{5}$ **В)** $2\sqrt{5}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Изразът $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$ при $x \neq 4$ и $x \neq 0$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{x-5}{x-1}$ **Б)** $\dfrac{4-5x}{-4x}$ **В)** $\dfrac{x-1}{x-4}$ **Г)** $\dfrac{x-1}{x}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2+5x-4=0$, то стойността на израза $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ е равна на:

А) $-\dfrac{5}{4}$ **Б)** $\dfrac{4}{5}$ **В)** $\dfrac{5}{4}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{57}}{2}$

4. Изразът $\dfrac{2\sin\alpha.\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}{\cos\alpha-\cos\left(180^\circ-\alpha\right)}$ при $\alpha \in \left[0^\circ;90^\circ\right)$ е равен на:

А) $\cos\alpha$ **Б)** $\sin\alpha$ **В)** $2\sin\alpha$ **Г)** 1

5. Стойността на кой от изразите е най-малка?

А) $\log_4 64$ **Б)** $\sqrt{2}\sin 45^\circ$ **В)** $\sqrt{\left(-5\right)^2}$ **Г)** $5^{\log_5 6}$

6. Кои са корените на уравнението $x^4-8x^2-9=0$?

А) 9 и –1 **Б)** ±1 и ±3 **В)** ±3 **Г)** 1 и –9

7. Кои са корените на уравнението $\sqrt{5-x}=x-5$?

А) 5 **Б)** 5 и 4 **В)** 10 и 8 **Г)** $\varnothing$

8. Кои са решенията на неравенството $4x^2-16 \leq 0$?

А) $\forall x \leq -2$ **Б)** $\forall x \leq \pm2$ **В)** $\forall x \in \left(-\infty;-2\right] \cup \left[2;+\infty\right)$ **Г)** $\forall x \in \left[-2;2\right]$

9. Коя е най-малката стойност на функцията $y=x^2+6x+10$?

А) 1 **Б)** –3 **В)** 10 **Г)** няма такава

10. Коя е най-голямата стойност на функцията $y=2\cos 3\alpha$ за $\alpha \in \left[0^\circ;90^\circ\right]$?

А) –2 **Б)** –6 **В)** 6 **Г)** 2

11. Стойността на израза $16^{\frac{3}{4}}25^{\frac{1}{2}}$ е равна на:

А) 60 **Б)** $8\sqrt{5}$ **В)** 40 **Г)** 10

12. Каква е вероятността при хвърляне на два зара да се паднат две шестици?

А) $\frac{1}{3}$ **Б)** $\frac{1}{6}$ **В)** $\frac{1}{18}$ **Г)** $\frac{1}{36}$

13. Триъгълникът ABC е равнобедрен, с основа $AB = 6$ m и височина към нея $CD = \sqrt{13}$ m. На колко е равна дължината на бедрото на този триъгълник?

А) 7 m **Б)** $\sqrt{22}$ m **В)** 2 m **Г)** $\sqrt{10}$ m

14. Успоредните прави a и b пресичат раменете на $\sphericalangle XOY$ съответно в точките A;C и B;D, като $OC = 4$ cm, $AB = 9$ cm и $OA = CD = x$ cm. На колко е равна стойността на x?

А) 36 **Б)** 4,5 **В)** 6 **Г)** $\sqrt{10}$

15. Два триъгълника са подобни с коефициент на подобие 3. Лицето на по-малкия от тях е 6 cm^2. На колко е равно лицето на другия триъгълник?

А) 9 cm^2 **Б)** 2 cm^2 **В)** 18 cm^2 **Г)** 54 cm^2

16. В правоъгълния триъгълник $ABC(\sphericalangle ACB = 90°)$, CH е височина, $AH = 4$ cm и $BH = 9$ cm. На колко е равно лицето на $\triangle ABC$?

А) 39 cm^2 **Б)** 36 cm^2 **В)** 13 cm^2 **Г)** 78 cm^2

17. Два от ъглите на един триъгълник са $81°$ и $39°$, а радиусът на описаната около него окръжност е $10\sqrt{3}$ cm. На колко е равна дължината на средната по големина страна на този триъгълник?

А) 60 cm **Б)** 30 cm **В)** 20 cm **Г)** 40 cm

18. Едната страна на правоъгълник е три пъти по-малка от другата, а лицето му е 12 cm^2. На колко е равен периметърът на този правоъгълник?

А) 8 cm **Б)** 12 cm **В)** 16 cm **Г)** 18 cm

19. В остроъгълния $\triangle ABC$ дължината на страната $BC = \sqrt{3}$ cm, а радиусът на описаната около него окръжност е 1 cm. На колко е равна градусната мярка на $\sphericalangle BAC$?

А) 60 **Б)** 120 **В)** 90 **Г)** 30

20. В правоъгълника $ABCD$ ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$ пресича диагонала BD в точката P, като $BP : PD = 4 : 3$ и $AC = 25$ cm. На колко сантиметра са равни съответно страните AB и AD?

А) 5 и $10\sqrt{6}$ **Б)** 4 и 3 **В)** 20 и 15 **Г)** 16 и 9

Отговорите на задачи от 21. до 25. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

21. Ако α е остър ъгъл и $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, то на колко е равна стойността на израза $\cos\alpha + \sin\alpha.\mathrm{tg}\,\alpha$?

22. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + kx + 1 = 0$, за кои стойности на k е изпълнено неравенството $x_1^2 + x_2^2 \le 2$?

23. В успоредника $ABCD$ ъгъл $BAD = 30°$, $AD = 2\sqrt{3}$ cm и $BD = 4$ cm. На колко е равна дължината на страната CD?

24. Дължините на страните на триъгълник са 13 cm, 14 cm и 15cm. На колко е равна дължината на средната по големина височина на този триъгълник?

25. Колко различни диагонали могат да се построят в изпъкнал десетоъгълник?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши уравнението $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - \left(x^2 - 4x\right) = 6$.

27. В окръжност с радиус R е вписан четириъгълник $ABCD$, като $AB = 2R$. Да се докаже, че периметърът на четириъгълника е равен на $2R\left[1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right]$, където $\alpha = \sphericalangle BAD$ и $\beta = \sphericalangle ABC$.

Ако $\alpha = \beta$, да се намери α така, че периметърът да е най-голям.

28. Разликата на петия и четвъртия член на геометрична прогресия е 576, а разликата на втория и първия и член е 9. На колко е равна сумата на първите 4 члена на прогресията?

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; $\quad$ при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $\quad a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b$; $\quad$ при $\quad b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $\quad P_n=1.2.3...\left(n-1\right)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $\quad V_n^k=n.\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\dfrac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+\left(n-1\right)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+\left(n-1\right)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp 1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha}$ $\quad$ $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ $\quad$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$