

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.

Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. В израза $\frac{x+1}{x-1}$ заместваме x с $\frac{y+1}{y-1}$. Полученият израз е равен на:

A) $\frac{y+1}{y-1}$ B) $\frac{y-1}{y+1}$ C) y D) $\frac{1}{y}$

Отговор: B. Имаме $\frac{\frac{y+1}{y-1} + 1}{\frac{y+1}{y-1} - 1} = \frac{\frac{2y}{y-1}}{\frac{2}{y-1}} = y$.

2. Нека $x = -10$. Числото $|||x| - x| - |x|| - x$ е равно на:

A) -20 B) -10 C) 10 D) 20

Отговор: Г. Числото е равно на

$$|||-10| - (-10)| - |-10|| - (-10) = |||2.10| - |-10|| - (-10) = |10| - (-10) = 20.$$

3. Пет отсечки имат дължини съответно 1, 3, 5, 7 и 9. Колко различни триъгълници могат да се построят с три от тези отсечки?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

Отговор: Б. Три отсечки с дължини $a > b > c$ са страни на триъгълник, точно когато $a < b+c$. Следователно единствените възможни триъгълници са тези със страни (3, 5, 7), (3, 7, 9) и (5, 7, 9).

4. Едната страна на правоъгълник е увеличена с 25%. С колко процента трябва да се увеличи другата страна така, че лицето на правоъгълника да се увеличи с 35%?

A) 4% B) 6% C) 8% D) 10%

Отговор: В. Нека страните на правоъгълника са a и b и те са увеличени съответно с 25% и $x\%$. Тогава страните на новия правоъгълник са

$$a + \frac{25}{100}a = \frac{5}{4}a, b + \frac{x}{100}b = \frac{100+x}{100}b.$$

Неговото лице е равно на $\frac{5}{4}a \cdot \frac{100+x}{100}b$ и от условието следва, че

$$\frac{5}{4}a \cdot \frac{100+x}{100}b = ab + \frac{35}{100}ab.$$

След съкращаване на ab и преобразуване получаваме $x = 8$.

5. Нека a, b, c са три различни едноцифрени числа. Най-голямата стойност на сумата на корените на уравнението $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) = 0$ е равна на:

A) $\frac{31}{2}$ B) $\frac{33}{2}$ C) $\frac{35}{2}$ D) $\frac{37}{2}$

Отговор: Б. От $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) = (x-b)(2x-a-c)$ следва, че корените на уравнението са b и $\frac{a+c}{2}$ и тяхната сума е равна на $\frac{2b+a+c}{2}$. Нейната най-голяма стойност се получава при $b = 9, a = 8, c = 7$ или $b = 9, a = 7, c = 8$ и е равна на $\frac{33}{2}$.

6. Нека a и b са различни реални числа, за които $a + \frac{2}{a} = b + \frac{2}{b}$. Числото ab е равно на:
 А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

Отговор: Б. От даденото равенство имаме $(a - b) \left(1 - \frac{2}{ab}\right) = 0$. Тъй като $a \neq b$ следва, че $ab = 2$.

7. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = AC = 28$ и $BC = 20$. Нека D, E и F са точки съответно върху страните AB, BC и AC така, че DE и EF са успоредни съответно на AC и AB . Периметърът на четириъгълник $ADEF$ е равен на:

$$\text{А) } 28 \quad \text{Б) } 56 \quad \text{В) } 84 \quad \text{Г) } 112$$

Отговор: Б. Четириъгълник $ADEF$ е успоредник. От $\angle DBE = \angle ACB = \angle DEB$ следва, че $DB = DE$. Тогава $AD + DE = AD + DB = AB = 28$ и периметърът на $ADEF$ е равен на $2(AD + DE) = 56$

8. Едно трицифренено число дава остатъци 1, 3 и 10 при деление съответно на 9, 10 и 11. При деление на 13 това число дава остатък:
 А) 1 Б) 3 В) 5 Г) 7

Отговор: А. Нека N е даденото число. Тогава $N = 9k + 1 = 10l + 3 = 11m + 10$, където k, l и m са естествени числа. От второто равенство следва, че 10 дели $k + 2$, т.e. $k = 10t - 2$. Тогава $N = 90t - 17 = 11m + 10$ и следва, че 11 дели $2t + 6$, т.e. $t + 3$ и $t = 11s - 3$, където s е естествено число. Следователно $N = 90t - 17 = 990s - 287$ и понеже N е трицифренено число заключаваме, че $s = 1$, т.e. $N = 703$. Това число дава остатък 1 при деление на 13.

9. Нека x и y са естествени числа, за които $3x^2y^2 + y^2 = 12x^2 + 52$. Числото $x^2 + y^2$ е равно на:
 А) 10 Б) 17 В) 20 Г) 25

Отговор: Б. Даденото равенство записваме във вида $(3x^2 + 1)(y^2 - 4) = 3 \cdot 4^2$. Оттук $3x^2 + 1 = 4$ и $y^2 - 4 = 3 \cdot 4$. (Защо?). Следователно $x = 1, y = 4$ и $x^2 + y^2 = 17$.

10. Нека $ABCD$ е квадрат с лице 3, M и N са средите на страните AB и BC и K е пресечната точка на AN и CM . Лицето на четириъгълник $AKCD$ е равно на:

$$\text{А) } \frac{2}{2} \quad \text{Б) } \frac{3}{2} \quad \text{В) } \frac{4}{2} \quad \text{Г) } \frac{5}{2}$$

Отговор: В. Нека O е пресечната точка на AC и BD . Тогава O е средата на AC и тъй като K е медицентърът на триъгълник ABC следва, че точките B, K, O, D лежат на една права. Следователно

$$\frac{DK}{KB} = \frac{DO + KO}{KB} = \frac{BK + 2KO}{BK} = 2.$$

Триъгълниците DKC и DBC имат една и съща височина през върха C и следователно

$$\frac{S_{DKC}}{S_{DBC}} = \frac{DK}{DB} = \frac{2}{3}.$$

Тъй като $S_{DBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{3}{2}$ следва, че $S_{DKC} = 1$. Аналогично $S_{DKA} = 1$ и $S_{AKCD} = 2$.

11. Да се намери най-малкото естествено число n такова, че както и да се представи 10^n като произведение на две естествени числа поне едно от тези числа има цифра 0.

Отговор: 8. Ако и двете числа се делят на 2 и на 5, то последната им цифра е 0. Следователно трябва да разгледаме случая, когато двете числа са 2^n и 5^n и да намерим най-малкото n , за което поне едно от тях има цифра 0. За 2 това е $n = 10$, а за 5 е $n = 8$ и отговорът е 8.

12. Нека a, b, c са реални числа, за които $a + b + c = 3$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Да се намери произведението на най-малката и най-голямата възможна стойност на c .

Отговор: -3 . От $a+b=3-c$, $a^2+b^2=9-c^2$ и неравенството $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ (еквивалентно на $(a-b)^2 \geq 0$) следва, че $2(9-c^2) \geq (3-c)^2$. От тук $(c-1)^2 \leq 4$, т.e. $-2 \leq c-1 \leq 2$. Следователно най-голямата стойност на c е 3, а най-малката е -1 . Те се достигат съответно при $a=b=0$ и $a=b=2$.

13. Нека $n = 2017^2 + 2^{2017}$. Да се намери последната цифра на числото $n^2 + 2^n$.

Отговор: 3 . Ако $k = 4m + 1$ последната цифра на числото $2^k = 2 \cdot 16^m$ е 2. В частност, последната цифра на 2^{2017} е 2. Тъй като последната цифра на 2017^2 е 9, то последната цифра на n , а значи и на n^2 е 1. От друга страна n има вида $4m + 1$ и последната цифра на 2^n е 2, т.e. последната цифра на $n^2 + 2^n$ е 3.

14. Нека A е множество от m последователни цели числа със сума $2m$, а B е множество от $2m$ последователни цели числа със сума m . Да се намери m , ако абсолютната стойност на разликата на най-големите елементи на A и B е 100.

Отговор: 203 . Нека $A = \{a+1, \dots, a+m\}$, $B = \{b+1, \dots, b+2m\}$.

Тъй като $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ от условието следва, че

$$ma + \frac{m(m+1)}{2} = 2m, 2mb + \frac{2m(2m+1)}{2} = m \text{ и } |a - b - m| = 100.$$

От първите две равенства получаваме съответно $a = \frac{3-m}{2}$ и $b = -m$. Като заместим в третото равенство получаваме $\left| \frac{3-m}{2} \right| = 100$ и тъй като m е естествено число следва, че $m = 203$.

15. Да се намери броят на естествените числа от 1 до 1000 включително, които могат да се представят като разлика на квадратите на две неотрицателни цели числа.

Отговор: 750 . Числата с исканото свойство имат вида $(x+y)(x-y)$. Всяко нечетно число $2n-1$ има този вид, защото можем да изберем $x=n$, $y=n-1$. Броят на нечетните числа от 1 до 1000 е 500. Да предположим, че $(x+y)(x-y)$ е четно число. Тогава поне едно от числата $x+y$ и $x-y$ е четно число и тъй като разликата им $(x+y) - (x-y) = 2y$ е четно число, следва, че и двете числа са четни, т.e. четното число се дели на 4. Обратно, всяко естествено число от вида $4n$ може да се представи във вида $(x+y)(x-y)$, като вземем $x = n+1$, $y = n-1$. Броят на числата от 1 до 1000, които се делят на 4 е 250. Следователно търсеният брой е $500 + 250 = 750$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.