

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.

Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Кое е най-голямото цяло число, което е по-малко от

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{3}{2} - \frac{5}{3} - \frac{7}{5} ?$$

- А) -6; Б) -4; В) -3; Г) -2.

Отговор: В.

2. Ако $a^2 + 2ab + 4b^2 + 2^{10} = 2^m$, където $a = 2^5$ и $b = 2^4$, на колко е равно m ?

- А) 10; Б) 11; В) 12; Г) не може да се определи.

Отговор: В. Тъй като $a^2 + 2ab = 4b^2 + 2^{10} = 2^{11}$, получаваме $2^m = 2^{12}$, откъдето $m = 12$.

3. Дадени са два правоъгълника $ABCD$ и $BEDF$, като върхът C на първия лежи на страната EF на втория. Известно е, че $AB = 12$ и $BC = 5$. Да се намери лицето на петоъгълника $ABEFD$

- А) 90; Б) 100; В) 60; Г) 84.

Отговор: А. Лицето на $\triangle BCD$ е 30 и то е равно на половината от лицата и на двета правоъгълника. Следователно лицето на петоъгълника е $3.30 = 90$.

4. Средната възраст на шестима приятели е 13. Ако към тях се добавят още трима, средната възраст на цялата група става 15. Каква е средната възраст на добавените трима?

- А) 15; Б) 17; В) 19; Г) 21.

Отговор: В. Ако възрастите на първите 6 са a_1, a_2, \dots, a_6 , а на добавените a_7, a_8, a_9 , от условието следва, че $a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 6 \cdot 13$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9 \cdot 15$. Тогава $a_7 + a_8 + a_9 = 9 \cdot 15 - 6 \cdot 13 = 57$, което означава, че търсената средна възраст е 19.

5. Колко са четирицифрените числа с четни първа (ненулева) и последна цифра, които нямат делител, по-голям от 2000 и по-малък от 2020?

- А) 1944; Б) 1945; В) 1960; Г) 1964.

Отговор: Б. Четирицифрените числа с четни първа и последна цифра са $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2000$. От тях трябва да махнем по две за всеки от нечетните делители $2001, 2003, \dots, 2019$ (общо $10 \cdot 2 = 20$) и по четири за всеки от четните делители $2002, 2004, \dots, 2018$ (общо $9 \cdot 4 = 36$). Лесно се вижда, че няма число, което да се премахва и по двета начина. Следователно търсеният брой е $2000 - 20 - 36 = 1944$.

6. Точка E е вътрешна за квадрата $ABCD$ и е такава, че $AB = BE$ и $\angle DAE = 27^\circ$. Правите AC и BE се пресичат в точка F . Да се намери $\angle BFA$.

- А) 81° ; Б) 80° ; В) 99° ; Г) 89° .

Отговор: А. Търсеният ъгъл е външен за $\triangle AFE$. Имаме $\angle FAE = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$ и $\angle AEF = \angle BAE = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$. Следователно $\angle BFA = 18^\circ + 63^\circ = 81^\circ$.

7. С $n!$ се означава произведението $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (например $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). Кое е най-голямото n , за което $n!$ завършва на точно 100 нули?

- A)** 405; **B)** 409; **C)** 410; **D)** 414.

Отговор: **B.** Трябва да намерим най-голямото n , за което степенният показател на 5 в каноничното разлагане на $n!$ е равен на 100. Отчитайки приносите на кратните на 5, но не и на 25, на кратните на 25, но не и на 125 и на кратните на 125 получаваме, че степенен показател 100 се достига за пръв път при $405!$, а следващата степен на 5 ще се появи в $410!$. Следователно търсеното n е 409.

8. В един клас не по-малко от 96.5% и не повече от 97.5% от учениците никога не са получавали двойки. Колко най-малко ученици има в този клас?

- A)** 20; **B)** 26; **C)** 28; **D)** 29.

Отговор: **G.** Нека в класа има N ученици. От условието следва, че поне един от тях никога е имал двойка. Следователно $\frac{3.5}{100} \cdot N \geq 1$, откъдето $N \geq \frac{200}{7} = 28\frac{4}{7}$, т.e. $N \geq 29$. Клас с 29 ученици и един двойкаджия изпълнява условието.

9. На един остров живеят рицари, които винаги казват истината, и лъжци, които винаги лъжат. За говорител на острова се кандидатирали жителите A_1, A_2, \dots, A_n и всеки от тях се изказал, като A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, казал: „Без да броите мен, от останалите кандидати лъжците са с k повече от рицарите“. Колко най-много са кандидатите?

- A)** 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** не може да се определи.

Отговор: **B.** Ако измежду кандидатите има x лъжци, то $n - 1 = x + (x - k)$, т.e. x е еднозначно определено от k . Това означава, че измежду кандидатите има най-много един рицар. Ако няма рицар, то $n = 1$. Ако $n > 1$ то A_{n-1} е рицар. Тогава $n \leq 3$, защото при $n > 3$ ще следва, че и A_{n-3} също е рицар. Следователно търсената максимална стойност на n е 3 и се достига от кандидати лъжец, рицар, лъжец.

10. Колко са трицифрените естествени числа x , за които съществува естествено число y , такова, че $x^2 + y^2$ се дели на 7.

- A)** 130; **B)** 128; **C)** 127; **D)** 129.

Отговор: **B.** Изследване на квадратите на целите числа при деление на 7 показва, че $7|x^2 + y^2 \iff 7|x, 7|y$. Следователно търсените x са точно тези, които се делят на 7 и броят им е 128 ($900 = 128 \cdot 7 + 4$).

11. От петцифреното число A са получени две шестцифрени числа P и Q съответно с добавяне на цифрата 1 в началото и в края на A . Оказалось се, че $Q = 3P$. Да се намери A .

Отговор: 42857. От условието следва, че $10A + 1 = Q$ и $100000 + A = P$. Тогава $Q = 3P$ дава уравнението $10A + 1 = 300000 + 3A$, откъдето намираме $A = 42857$.

12. В някои от клетките на таблица с размери 20×21 са поставени пулове така, че във всеки правоъгълник с размери 2×3 има точно два пула. Колко пула се съдържат в таблицата?

Отговор: 140. Разглеждането на квадрат 3×3 с център клетка, в която има пул, води до извода, че в такъв квадрат има три пула (и те са разположени по единния диагонал). Лесно се вижда, че в квадрат 3×3 има 3 или 4 пула. При това, ако в квадрат 3×3 има 4 пула, те са в

четирите ъглови клетки. Тогава, поне един от четирите квадрата с център тези ъглови клетки е изцяло в таблицата и в този квадрат трите пула са в единия диагонал. Лесно се вижда, че съществува правоъгълник 2×3 с повече от да пула. Тъй като дадената таблица се разбива на 42 квадрата 3×3 и 7 правоъгълника 2×3 , общият брой на пуловете в таблицата е $42 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 140$.

- 13.** За числото $M \leq 1000$ е известно, че ако изберем по случаен начин число измежду $1, 2, \dots, 1000$, вероятността избраното число да е делител на M е $\frac{1}{100}$. Коя е най-голямата възможна стойност на M ?

Отговор: 976. От условието следва, че M има точно 10 естествени делителя. Тогава каноничното разлагане на M е p^9 или $p^4 q$, където p и q са прости числа. В първия случай максималното M е $2^9 = 512$, а във втория – $2^4 \cdot 61 = 976$, което е и търсеното.

- 14.** В изпъкнал n -ъгълник, $n \geq 4$, са построени всички диагонали. Оказалось се, че никои три от тях не се пресичат в една точка и че пресечните точки на диагоналите (без да броим върховете) са 715. Да се намери n .

Отговор: 13. Тъй като всяка пресечна точка на два диагонала определя еднозначно четириъгълника, чийто диагонали са тези два, броят на пресечните точки е $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}$. Когато n расте, числото $\binom{n}{4}$ също расте. Следователно равенството $\binom{n}{4} = 715$ е възможно само за една стойност на n . Проверка на приличащи на подходящи n дава отговора $n = 13$.

- 15.** Да се намери сумата на всички естествени числа m със следното свойство: съществуват точно 2017 естествени числа n , за които едновременно са изпълнени неравенствата

$$2 \leq \frac{m}{n} \leq 5.$$

Отговор: 20165. Дадените неравенства могат да се запишат във вида $2m \leq 10n \leq 5m$. Това означава, че в множеството $\{2m, 2m+1, \dots, 5m-1, 5m\}$ има точно 2017 кратни на 10. Тогава $2016 \leq \frac{3m}{10} \leq 2018$, откъдето $m \in \{6720, 6721, \dots, 6726\}$. Директна проверка показва, че исканото свойство имат $m = 6720, 6722$ и 6723 (например при $m = 6720$ множеството е $\{13440, \dots, 33600\}$ и в него има $3360 - 1344 + 1 = 2017$ кратни на 10, а при $m = 6724$ множеството е $\{13448, \dots, 33620\}$ и в него има $3362 - 1345 + 1 = 2018$ кратни на 10). Търсената сума е $6720 + 6722 + 6723 = 20165$.