Математически турнир „Иван Салабашев“, 2016 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Произведението

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

е равно на: **А)** $\frac{1}{10}$ **Б)** $\frac{1}{9}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{10}{11}$

Отговор: А. Даденото произведение е равно на $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}\ldots\frac{8}{9}.\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$.

2. Нека p,q,r са прости числа, за които $(p+1)(q+1)r=pqr+32$. Произведението pqr е равно на: **А)** 28 **Б)** 44 **В)** 52 **Г)** 68

Отговор: В. От условието следва, че $(p+q+1)r=32$. Тогава $r=2$ и $p+q=15$. Оттук $p=2,q=13$ или $q=2,p=13$ и $pqr=52$.

3. Две страни на триъгълник имат дължини 10 и 15. Кое от долните числа не е възможно да е периметъра на триъгълника? **А)** 51 **Б)** 45 **В)** 41 **Г)** 35

Отговор: А. Нека a е дължината на третата страна на триъгълника. Тогава $15-10<a<15+10$, т.е. $5<a<25$ и периметърът на триъгълника е число между 30 и 50.

4. Едната страна на правоъгълник е увеличена с 10%, а другата с 20%. С колко процента се е увеличило лицето на правоъгълника? **А)** 12% **Б)** 22% **В)** 32% **Г)** 42%

Отговор: В. Нека страните на правоъгълника са a и b. Тогава страните на новия правоъгълник са

$$a+\frac{10}{100}a=\frac{11}{10}a, b+\frac{20}{100}b=\frac{12}{10}b.$$

Неговото лице е равно на

$$\frac{11}{10}a.\frac{12}{10}b=\frac{132}{100}ab=ab+\frac{32}{100}ab$$

и лицето на дадения правоъгълник се е увеличило с 32%.

5. Сумата на цифрите на трицифрено число, което намалява 7 пъти при зачертаване на средната му цифра се дели на:

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Отговор: Б. Нека числото е $\overline{abc}$. Тогава $\overline{abc}=7\overline{ac}$. Оттук $100a+10b+c=7(10a+c)$, т.е. $15a+5b=3c$. Следователно c се дели на 5 и следва, че $c=5$. Тогава $a=1,b=0$ и единственото трицифрено число с исканото свойство е 105. Сумата от цифрите му е 6 и се дели на 6.

6. Ако a и b са числа, за които $a>b>0$ и $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$, то числото $\frac{a+b}{a-b}$ е равно на:

А) 3 **Б)** 6 **В)** 9 **Г)** 1

Отговор: А. От даденото равенство имаме $a^2+b^2=\frac{5}{2}ab$. Следователно

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{\frac{5}{2}ab+2ab}{\frac{5}{2}ab-2ab}=9.$$

Тъй като $a>b>0$ следва, че $\frac{a+b}{a-b}=3$

7. Нека ABC е равностранен триъгълник, P е такава точка върху страната AB, за която $AP = 2PB$ и Q е точка върху страната AC, за която $CQ = 2AQ$. На колко е равен $\sphericalangle APQ$?

А) 15° **Б)** 30° **В)** 45° **Г)** 60°

Отговор: Б. Нека R е точка върху страната AC, за която $AR = 2CR$. Тогава

$$AR = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}AB = AP.$$

Тъй като $\sphericalangle PAC = 60^o$ следва, че триъгълник PAR е равностранен и $\sphericalangle APQ = 30^o$, защото Q е средата на AR.

8. Броят на целите числа по-големи от 100 и по-малки от 400, които имат поне една цифра 2 е равен на:

А) 126 **Б)** 128 **В)** 136 **Г)** 138

Отговор: Г. Разглеждаме числата между 100 и 400, които нямат цифра 2. За последната и средната цифра на такова число имаме по 9 възможности $(0, 1, 3, \ldots, 9)$, а за първата имаме 2 възможности $(1, 3)$. По този начин броим и числото 100, т.е. броят на разглежданите числа е $2.9.9 - 1 = 161$. Следователно търсеният брой е $299 - 161 = 138$.

9. За колко естествените числа $n > 1$ произведението на n и най-малкия прост делител на n не надминава 100 ?

А) 33 **Б)** 34 **В)** 35 **Г)** 36

Отговор: А. Нека p_n е най-малкия прост делител на n. Ако $p_n = 2$, то $n = 2, 4, \ldots, 50$. Ако $p_n = 3$, то $n = 3, 9, 15, 21, 27, 33$. Ако $p_n = 5$, то $n = 5$ и ако $p_n = 7$, то $n = 7$. Търсеният брой е $25 + 6 + 1 + 1 = 33$.

10. Нека $ABCD$ е ромб с диагонал $AC = 20$ и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Върху страната CD е взета точка N и нека P и Q са нейните ортогонални проекции върху диагоналите BD и AC. Най-малката възможна дължина на отсечката PQ е равна на:

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7

Отговор: Б. Нека O е пресечната точка на AC и BD. Тъй като $\sphericalangle DOC = 90^\circ$, то $OQNP$ е правоъгълник и $PQ = ON$. Отсечката ON е най-къса, когато е перпендикулярна на CD . В този случай $ON = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{4}AC = 5$, защото $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \sphericalangle DAB = 30^\circ$.

11. Да се намери броят на целите числа n, за които $n^2 + 8n + 3$ е квадрат на цяло число.

Отговор: 2. Нека $n^2 + 8n + 3 = m^2$. Тогава $(n + 4 - m)(n + 4 + m) = 13$. Оттук $n + 4 - m = 1, n + 4 + m = 13$ или $n + 4 - m = -1, n + 4 + m = -13$ и получаваме, че $n = 3, m = 6$ или $n = -11, m = -6$.

12. Нека a, b, c, d са реални числа, за които $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Да се намери най-малката стойност на израза $(a + 2)(b + 2) + cd$.

Отговор: 0. Нека $M = (a + 2)(b + 2) + cd$. Тогава

$$2M = 2ab + 4a + 4b + 8 + 2cd = 2ab + 4a+$$

$$+4b + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 + 2cd =$$

$$(a + b + 2)^2 + (c + d)^2 \geq 0.$$

Равенство имаме например при $a = b = c = -1, d = 1$.

13. Да се намери сумата на всички цели числа k, за които уравнението

$$(4k + 1)x + 16k^2 + 2015 = 0$$

има цял корен.

Отговор: -12. Нека k има исканото свойство. Тогава

$$x = -\frac{16k^2 + 2015}{4k+1} = -(4k-1) - \frac{2016}{4k+1}.$$

Следователно $4k+1$ е делител на $2016 = 32.7.9$ и получаваме, че $4k+1 = -63, -7, -3, 1, 9, 21$. Търсената сума е равна на

$$-16 - 2 - 1 + 0 + 2 + 5 = -12.$$

14. Да се намери най-малкото число от вида $|53^k - 37^l|$, където k и l са естествени числа.

Отговор: 16. Да отбележим, че разглежданите числа се делят на 4, защото 53^k и 37^l дават остатък 1 при деление на 4. Ще покажем, че търсеното число е $16 = |53 - 37|$. Тъй като

$$53^k \equiv (-1)^k \pmod 9, \quad 37^l \equiv 1 \pmod 9$$

следва, че $N = |53^k - 37^l| \equiv 0, \pm 2 \pmod 9$, което показва, че $N \neq 4, 8, 12$.

15. Да се намери броят на естествените числа n, за които числата $n(n+5)$ и $(n+1)(2n+3)$ имат едни и същи прости делители.

Отговор: 1. Да отбележим, че $n = 1$ не изпълнява условието. Нека $n > 1$ има исканото свойство и p е негов прост делител. От $(n+1)(2n+3) = 2n^2 + 5n + 3$ следва, че p дели 3, т.е. $p = 3$ и $n = 3^a$. Нека сега q е прост делител на $n+1$. От $n(n+5) = n^2 - 1 + 5(n+1) - 4$ следва, че q дели 4, т.е. $q = 2$ и $n + 1 = 2^b$. Тогава $3^a = 2^b - 1$ и $a > 0$. Следователно 3 дели $2^b - 1$ и лесно следва, че b е четно число. Нека $b = 2k$. Тогава $3^a = (2^k - 1)(2^k + 1)$ и заключаваме, че $2^k - 1 = 3^c, 2^k + 1 = 3^d, a = c + d$. Оттук $3^d - 3^c = 2$ и следователно $d = 1, c = 0$. Така $a = 1$ и намираме, че единственото число с исканото свойство е $n = 3$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.