

# Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.

## Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Едната страна на правоъгълник с периметър 60 е два пъти по-дълга от другата страна. Лицето на правоъгълника е равно на:
- A) 100    B) 150    C) 200    D) 250

**Отговор: B.** Нека страните на правоъгълника са  $x$  и  $2x$ . Тогава  $6x = 60$ , т.e.  $x = 10$ ,  $2x = 20$  и лицето на правоъгълника е  $10 \cdot 20 = 200$ .

2. Броят на естествените числа между 2000 и 4000, които се делят едновременно на 9 и 12 е равен на:
- A) 46    B) 56    C) 66    D) 76

**Отговор: B.** Първото и последното естествено число между 2000 и 4000, които се делят на 9 и 12 (т.e. на 36) са  $2016 = 36 \cdot 56$  и  $3996 = 36 \cdot 111$ . Търсеният брой е равен на  $111 - 55 = 56$ .

3. Броят на различните решения на уравнението  $|||x| + 2016| - 2015| = 1$  е равен на:

A) 1    B) 2    C) 3    D) 4

**Отговор: A.** Тъй като  $|a| \geq 0$  и  $|a| = a$  при  $a \geq 0$ , то

$$|||x| + 2016| - 2015| = ||x| + 2016 - 2015| = |x| + 1.$$

Следователно уравнението е еквивалентно на  $|x| = 0$  и има единствено решение  $x = 0$ .

4. На Новогодишна разпродажба в книжарница книгите се продават с 20% намаление. Петър използвал купон и купил книга на  $\frac{3}{4}$  от намалената цена, като платил 9 лв. Колко лева е оригиналната цена на книгата, купена от Петър?
- A) 10    B) 15    C) 20    D) 25

**Отговор: B.** Нека оригиналната цена на книгата е  $x$  лв. Тази цена е намалена с 20% и става  $x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x$ . Тогава с купон цената на книгата е  $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{3}{5}x$ . Следователно  $\frac{3}{5}x = 9$  и първоначалната цена на книгата е 15 лв.

5. Нека  $a, b, c$  са реални числа, за които  $a \neq b$  и е изпълнено равенството  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2015$ . Числото  $c^2(a+b)$  е равно на:
- A) -2015    B) 0    C) 2000    D) 2015

**Отговор: Г.** Имаме  $a^2(b+c) - b^2(a+c) = ab(a-b) + (a^2 - b^2)c = (a-b)(ab + bc + ca) = 0$ . Следователно  $ab + bc + ca = 0$  и умножавайки с  $a - c$  получаваме  $a^2(b+c) - c^2(a+b) = 0$ , т.e.  $c^2(a+b) = a^2(b+c) = 2015$ .

6. Нека  $ABC$  е остроъгълен триъгълник с  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $D$  е петата на височината през върха  $C$  и  $P$  е вътрешна точка за височината  $CD$ , за която  $AP = BC$ . Щъгълът между правите  $AP$  и  $BC$  равен на:

A)  $30^\circ$     B)  $45^\circ$     C)  $60^\circ$     D)  $90^\circ$

**Отговор: Г.** Нека  $E$  е пресечната точка на правите  $AP$  и  $BC$ . От  $AD = CD$  следва, че триъгълниците  $PAD$  и  $BCD$  са еднакви. Тогава  $\angle DCB = \angle BAE$  и  $\angle AEB = \angle BDC = 90^\circ$ .

7. Сумата на естествените числа  $k$ , за които числото  $10 + k$  дели числото  $10 + k^2$  е равна на:

A) 128    B) 138    C) 148    D) 158

**Отговор: Г.** Тъй като  $10 + k^2 = 110 + (k-10)(k+10)$ , то  $k$  има исканото свойство точно когато  $k + 10$  дели  $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ . Оттук  $k + 10 = 11, 22, 55, 110$ , т.e.  $k = 1, 12, 45, 100$  и търсената сума е равна на 158.

8. Нека  $p$  и  $q$  са взаимнопости естествени числа и  $d > 1$  е общ делител на числата  $3p - q$  и  $5p + 2q$ . Числото  $d$  е равно на:
- A) 5    B) 7    C) 11    D) 19

**Отговор: В.** Тъй като  $d > 1$  дели числата  $2(3p-q) + (5p+2q) = 11p$  и  $3(5p+2q) - 5(3p-q) = 11q$  следва, че  $d = 11$ , защото  $p$  и  $q$  са взаимнопрости числа. Този общ делител се получава например, при  $p = 4, q = 1$ .

**9.** Върху страните  $AB$  и  $AD$  на успоредник  $ABCD$  са взети съответно вътрешни точки  $E$  и  $F$ . Нека  $K$  е пресечната точка на отсечките  $DE$  и  $FC$ ,  $L$  е пресечната точка на отсечките  $DE$  и  $BF$ , и  $M$  е пресечната точка на отсечките  $FB$  и  $EC$ . Отношението  $\frac{S_{EML} + S_{DKC}}{S_{FLK} + S_{MBC}}$  е равно на:

$$\text{А)} 1 \quad \text{Б)} 2 \quad \text{В)} \frac{1}{2} \quad \text{Г)} \frac{1}{3}$$

**Отговор: А.** Имаме  $S_{EML} + S_{DKC} = S_{DCE} - S_{KLMC} = \frac{S_{ABCD}}{2} - S_{KLMC}$ . Аналогично

$$S_{FLK} + S_{MBC} = S_{BCF} - S_{KLMC} = \frac{S_{ABCD}}{2} - S_{KLMC}$$

и даденото отношение е равно на 1.

**10.** Ако  $p, 3p+2, 7p+6, 9p+8$  и  $11p+10$  са прости числа, то числото  $6p+11$  е:

- |                  |                 |
|------------------|-----------------|
| А) просто        | Б) съставно     |
| В) точен квадрат | Г) кратно на 11 |

**Отговор: Б.** Нека  $l$  е остатъкът на  $p$  при деление на 5, т.e.  $p = 5k+l, l = 0, 1, 2, 3, 4$ . Ако  $l = 0$ , то  $p = 5$  и  $11p+10 = 65$  не е просто число. При  $l = 1, 2, 3$  съответно числата  $3p+2, 7p+6, 9p+8$  се делят на 5 и не са прости. Следователно  $p = 5k+4$  и  $6p+11 = 5(6k+7)$  е съставно число. Това число не се дели на 11, защото в противен случай  $p = 11$  и  $3p+2 = 35$  не е просто число. То не е точен квадрат, защото дава остатък 2 при деление на 3. Да отбележим, че при  $p = 19$  дадените числа са прости.

**11.** Нека  $ABC$  е правоъгълен триъгълник с  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$  и хипотенуза  $AB = 10$ . Нека  $D$  е вътрешна точка за триъгълника, за която  $\angle BDC = 90^\circ$  и  $\angle ACD = \angle DBA$ . Ако  $E$  е пресечната точка на правите  $AB$  и  $CD$  да се намери дължината на отсечката  $AE$ .

**Отговор: 5.** Имаме  $BC = \frac{1}{2}AB = 5$ . От друга страна

$$\angle ACE + \angle BCE = 90^\circ = \angle BCE + \angle CBD,$$

т.e.  $\angle ACE = \angle CBD$ . Следователно  $\angle CBD = \angle DBE$  и  $BD$  е ъглополовяща и височина в  $\triangle CBE$  и  $CB = BE$ . Тъй като  $\angle EBC = 60^\circ$  следва, че този триъгълник е равностранен. Тогава  $EB = BC = 5$  и  $AE = AB - BE = 5$ .

**12.** Да се намери броят на двойките естествените числа  $(x, y)$ , за които числото  $\frac{xy^2}{x+y}$  е просто.

**Отговор: 2.** Нека  $x, y$  са естествени числа и  $p$  е просто число, за което  $\frac{xy^2}{x+y} = p$ . Нека  $d = (x, y)$  и  $x = ad, y = bd, (a, b) = 1$ . След заместване и съкращаване горното равенство приема вида  $d^2ab^2 = p(a+b)$ . Тъй като  $b^2$  и  $a+b$  са взаимно-прости числа следва, че  $b^2$  дели  $p$ , т.e.  $b = 1$  и  $d^2a = p(a+1)$ . Сега  $a$  и  $a+1$  са взаимно-прости и  $a$  дели  $p$ , т.e.  $a = 1$  или  $a = p$ . В първия случай  $d^2 = 2p$ , откъдето  $p = 2, d = 2$  и  $x = y = 2$ . Нека  $a = p$ . Тогава  $d^2 = p+1$ , т.e.  $p = (d-1)(d+1)$ . Тъй като  $d-1 < d+1$  следва, че  $d-1 = 1, d+1 = p$  и получаваме  $d = 2, p = 3, x = 6, y = 2$ .

**13.** На колко най-много нули може да завърши число от вида  $3^n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Отговор: 1.** Числото  $3^2 + 1 = 10$  завърши на една нула. Число от вида  $3^n + 1$  не може да завърши на повече от една нула, защото в противен случай  $n$  е нечетно число (при четно  $n$  числото  $3^n = (4 - 1)^n$  дава остатък 1 при деление 4 и  $3^n + 1$  не се дели на 4) и ако  $n = 2k + 1$ , то в зависимост от четността на  $k$ , числото  $3^n + 1 = 3 \cdot 9^k + 1 = 3 \cdot (10 - 1)^k + 1$  дава остатък 4 или 8 при деление на 10 и не се дели на 10.

**14.** Да се намери най-голямото естествено число  $k$ , за което съществува естествено число  $n$  такова, че всички числа  $(n+1)2^n, (n+2)2^{n+1}, \dots, (n+k)2^{n+k-1}$  са точни квадрати.

**Отговор: 2.** При  $k = 2$  и  $n = 7$  условието е изпълнено, защото в този случай числата  $8 \cdot 2^7 = 2^{10} = 32^2$  и  $9 \cdot 2^8 = 48^2$  са точни квадрати. Сега ще покажем, че  $k \leq 2$ . Да допуснем, че за някое естествено число  $n$  числата  $(n+1)2^n$  и  $(n+3)2^{n+2}$  са точни квадрати. Ако  $n$  е четно число, то  $2^n$  и  $2^{n+2}$  са точни квадрати и значи  $n+1$  и  $n+3$  са точни квадрати, което е невъзможно. (Докажете!) Нека сега  $n = 2k + 1, k \geq 0$  е нечетно число. Тогава  $(n+1)2^n = (k+1)2^{2k+2}$  и  $(n+3)2^{n+2} = (k+2)2^{2k+4}$  са точни квадрати. Тъй като  $2^{2k+2}$  и  $2^{2k+4}$  са точни квадрати, то  $k+1$  и  $k+2$  са точни квадрати, което е невъзможно.

**15.** Да се намери броят на естествените числа, чиято разлика с произведението на цифрите им (в десетичния запис) е равна на сумата на цифрите им.

**Отговор: 9.** Нека  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  е  $n$ -цифреното число с исканото свойство. Очевидно  $n \geq 2$  и да допуснем, че  $n \geq 3$ . Тогава

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_1 a_2 \dots a_n &= \overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \\ &= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n \geq \\ &\geq a_1 10^{n-1} + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n, \end{aligned}$$

което е еквивалентно на неравенството  $1 + a_2 \dots a_n \geq 10^{n-1}$ . Това е противоречие, защото при  $n \geq 3$  имаме  $1 + a_2 \dots a_n \leq 1 + 9^{n-1} < 10^{n-1}$ . Следователно разглежданите числа са двуцифрени и нека числото  $\overline{a_1 a_2}$  изпълнява условието. Тогава

$$10a_1 + a_2 = \overline{a_1 a_2} = a_1 a_2 + a_1 + a_2,$$

откъдето  $a_2 = 9$ . Окончателно, числата с исканото свойство са  $19, 29, \dots, 99$  и техният брой е 9.

**Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаролов.**