

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.

Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Сборът $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ е записан като несъкратима дроб $\frac{p}{q}$. Колко е $p + q$?
 А) 110 Б) 157 В) 193 Г) 211

Отговор: **В.** Имаме $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{133}{60}$, откъдето $p + q = 193$.

2. Колко са несъкратимите дроби от вида $\frac{a}{b}$, за които $3 \leq a \leq 8$ и $4 \leq b \leq 7$?
 А) 12 Б) 13 В) 14 Г) 15

Отговор: **Г.** Несъкратимите дроби са: $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{5}, \frac{8}{7}$.

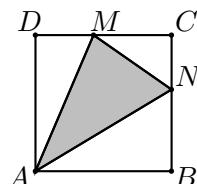
3. По време на разпродажба телевизор от 840 лева се продава с 25% отстъпка. Колко процента трябва да бъде отстъпката на компютър от 750 лева, за бъде намалената му цена равна на намалената цена на телевизора?
 А) 10 Б) 16 В) 18 Г) 22

Отговор: **Б.** Намалената цена на телевизора е $\frac{75}{100} \cdot 840 = 630$ лева. Това означава, че отстъпката на компютъра е $750 - 630 = 120$ лева. Тогава $\frac{x}{100} \cdot 750 = 120$, откъдето $x = 16$.

4. Всички двуцифренни числа от 16 до 27 включително са записани едно след друго и е получено едно 24-цифренено число: 161718192021222324252627. Кое е най-голямото естествено число n , за което числото 3^n дели това число?
 А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

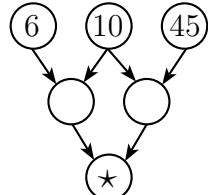
Отговор: **Б.** Като използваме, че остатътък при деление на 9 на едно число е равен на остатъка при деление на сума от цифрите му с 9, получаваме, че остатъкът на даденото число при деление с 9 е равен на остатъка при деление на $S = 16+17+\dots+27$ с 9. Понеже $S = \frac{27.28}{2} - \frac{15.16}{2}$ е число, което се дели на 3, но не се дели на 9, то търсеното число е 1.

5. Квадрат $ABCD$ има страна 5 см. Точката M и N съответно от страните CD и BC са такива, че $DM = 2$ см и лицето на триъгълника AMN е 46% от лицето на квадрата. Колко сантиметра е отсечката BN ?
 А) 0,5 Б) 1 В) 1,5 Г) 2



Отговор: **Б.** Лицето на триъгълника AMN е равно на $25 - \frac{5}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{3(5-x)}{2} = \frac{25}{2} - x$. Тогава $\frac{25}{2} - x = \frac{46}{100} \cdot 25 = \frac{23}{2}$, откъдето $x = 1$ см.

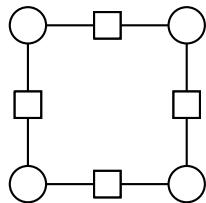
6. Във всяко празно кръгче Камен записва или НОД, или НОК на двете числа в кръгчетата над него. Кое число **не може** да се появии в кръгчето със звездичка?
 А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 5



Отговор: **В.** Лесно се построяват примери, при които се получава 1, 2 или 5. Ако искаме да получим 3, числата във втория ред трябва да се делят на 3. Тогава и на двете места на втория ред трябва да запишем НОК на съответните числа, тогава числата във втория ред са 30 и 90 и на третия ред не може да се получи 3.

7. Дарин иска да запише във всяко кръгче 1 или -1 , така че ако във всяко квадратче след това запише произведението на числата в двете му съседни кръгчета, то сборът на числата в четирите квадратчета да е равен на нула. По колко начина може да направи това Дарин?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14



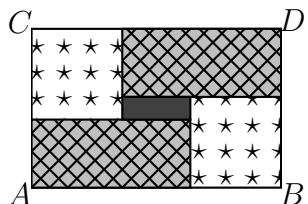
Отговор: В. За да бъде сборът на числата равен на нула трябва да е изпълнено едно от следните условия: има три единици и една -1 ; има три -1 и една 1; има две съседни 1 и две съседни -1 . Всеки от горните три случая дава по четири възможности за разположение на 1 и -1 в кръгчетата, общо 12 възможности.

8. Димитър, Калоян, Филип и Георги изляли кутия бонбони. Най-напред Димитър изял $\frac{1}{5}$ от всички бонбони и още 3 бонбона, след това Калоян изял $\frac{1}{3}$ от останалите бонбони, след това Филип изял $\frac{1}{2}$ от останалите и още един бонбон и накрая Георги изял последните 6 бонбона. Кой изял най-много бонбони?

- | | |
|------------|-----------|
| A) Димитър | Б) Калоян |
| В) Филип | Г) Георги |

Отговор: А. Тръгвайки отзад напред получаваме, че Георги е изял 6 бонбона, Филип е изял 8 бонбона, Калоян е изял 7 бонбона, а Димитър е изял 9 бонбона.

9. Правоъгълникът $ABCD$ е слобен от две еднакви сиви плоочки, две еднакви плоочки на звездички и една черна плоочка. Черната плоочка има страни 1 дм и 3 дм, а обиколката на една сива плоочка е 56 дм. Колко дециметра е обиколката на $ABCD$?



- A) 100 B) 104 C) 108 D) 112

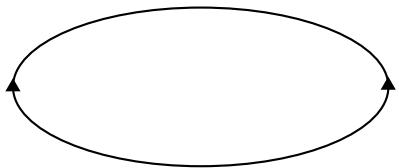
Отговор: В. Ако една сива плоочка има размери x и y , то една плоочка със звездички има размери $y-3$ и $x+1$. Следователно обиколката на плоочка със звездички е равна на обиколката на сива плоочка минус 4. Тогава обиколката на $ABCD$ е равна на сума от обиколките на двете сиви плоочки минус 4. Следователно обиколката е $2 \cdot 56 - 4 = 108$ дм.

10. Мария, Мила, Иван и Петър изиграли турнир по шах, като всеки двама изиграли по две партии помеждуди си (за победа в шаха се дава 1 точка, за равен резултат по 0,5 точки и при загуба не се дават точки). Известно е, че: Мария се класирала на първо място с 5,5 точки; Петър бил последен с 1,5 точки; няма двама с равен брой точки. Колко точки има Мила, ако се е класирала на второ място?

- A) 2,5 B) 3 C) 3,5 D) 4

Отговор: Б. Общо партиите са 12 и следователно толкова са точките на всички състезатели. Точките на Мила и Иван са $12 - 5,5 - 1,5 = 5$. Понеже Мила има повече точки от Иван, тя има поне 3 точки. Ако тя има повече от 3 точки, то Иван ще има най-много 1,5. Тогава или Петър не е последен или Иван и Петър имат равен брой точки, противоречие с условието. Следователно Мила има 3 точки.

11. Иван и Петър тичат по кръгла писта, като тръгват от противоположни краища на пистата и тичат в противоположни посоки. Иван прави една обиколка за 10 минути, а Петър за 15 минути. Колко пъти са се разминали за 1 час тичане?



Отговор: 10. За 1 минута двамата общо изминават $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ от една обиколка на пистата.

Следователно за 6 минути двамата общо пробягват една обиколка на пистата и първата им среща ще бъде след 3 минути. След това ще се срещат на всяка шеста минута. Срещите им ще бъдат при минути $6k + 3$ за $k = 0, 1, \dots, 9$, общо 10 срещи.

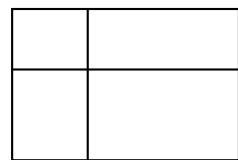
12. Кое е най-малкото естествено число, което има 15 делители, един от които е 6?

Отговор: 144. Числото има поне два прости делители – 2 и 3. Понеже $15 = 3 \cdot 5$ е единственото представяне на числото 15 като произведение на две числа, всяко от които е по-голямо от 1, то числото има вида $2^\alpha \cdot 3^\beta$ където $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 15$. Най-малко число се получава при $\alpha = 4$ и $\beta = 2$ и това число е $2^4 \cdot 3^2 = 144$.

13. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската е записано числото x , всяка минута Илина заменя това число с едно от числата $2x$ или $\frac{x+1}{3}$, ако това число е цяло (например, числото 4 може да се замени само с 8, докато числото 8 може да се замени както с 16, така и с 3). Най-малко след колко минути Илина може да получи числото 7?

Отговор: 13. Имаме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 11 \rightarrow 22 \rightarrow 44 \rightarrow 88 \rightarrow 176 \rightarrow 59 \rightarrow 20 \rightarrow 7$ или $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 43 \rightarrow 86 \rightarrow 29 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 7$.

14. Правоъгълник е разделен на 4 правоъгълника, както е показано на чертежа. Георги забелязал, че правоъгълниците са различни и дължините на страните им са цели числа в сантиметри. Два от тези четири правоъгълника имат лица, числено равни на техните периметри. Колко е лицето на големия правоъгълник?



Отговор: 70. Ако правоъгълник със страни a и b има лице, числено равно на неговия периметър, то $ab = 2(a+b)$. Това равенство може да се запише като $(a-2)(b-2) = 4$. Понеже $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, то единствените възможности за a и b са двойките 4, 4 и 6, 3. Следователно два от правоъгълниците са със страни 4×4 и 6×3 . Тези два правоъгълника не могат да имат обща страна и следователно страните на големия правоъгълник са $6+4=10$ и $3+4=7$. Неговото лице е $7 \cdot 10 = 70$ кв. см.

15. Йоан записал всички четирицифрени числа, като използвал само цифрите 1, 2 и 3. Цветан иска да избере няколко от тези числа така, че всеки две от избраните числа да се различават в точно три позиции (например, числата 1223 и 3231 се различават в три позиции, докато 1111 и 1231 се различават в две позиции). Колко най-много числа може да избере Цветан?

Отговор: 9. Пример за 9 такива числа е: 1111, 1222, 1333, 2123, 2231, 2312, 3132, 3321, 3213. Да допуснем, че има повече от 9 такива числа. Понеже възможностите за първите две позиции са $3 \cdot 3 = 9$, то от принципа на Дирихле следва, че има поне две числа, които съвпадат в първите две позиции. Тогава те могат да се различават най-много в другите две позиции, противоречие.

Задачите от тази тема са предложени от Емил Колев.