

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2015 г.

Решения на задачите от темата за 10–12 клас

1. Даден е неравностранен остроъгълен триъгълник ABC . Правата през ортоцентъра H и центъра O на описаната окръжност пресича страните AC и BC в точки P и Q така, че $HP = OQ$. Да се намери $\measuredangle ACB$.

Решение. Понеже $\measuredangle ACH = \measuredangle BCO$, от синусовата теорема следва, че

$$\frac{CP}{\sin \measuredangle CHP} = \frac{HP}{\sin \measuredangle HCP} = \frac{OQ}{\sin \measuredangle OCQ} = \frac{CQ}{\sin \measuredangle COQ},$$

откъдето

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{\sin \measuredangle CHO}{\sin \measuredangle COH} = \frac{CO}{CH}.$$

Аналогично $\frac{CP}{CQ} = \frac{CH}{CO}$ и значи $CH = CO$. Понеже $CH = 2CO \cos \measuredangle ACB$, следва, че $\measuredangle ACB = 60^\circ$.

Забележка. Може да се докаже, че ако $\measuredangle ACB = 60^\circ$, то $HP = OQ$.

Оценяване. (6 т.) 1 т. за $\measuredangle ACH = \measuredangle BCO$, по 2 т. за всяко от равенствата $\frac{CP}{CQ} = \frac{CO}{CH}$ и $\frac{CP}{CQ} = \frac{CH}{CO}$, и 1 т. за $CH = 2CO \cos \measuredangle ACB$.

2. Нека a е реален параметър. Да се докаже, че ако уравнението

$$(x^3 - ax)^3 - a(x^3 - ax) = x$$

има повече от 5 различни реални корена, то има 9 различни реални корена.

Решение. Ясно е, че $x = 0$ е корен на даденото уравнение (*). При $x \neq 0$ полагаме $y = x^2 - a$ и получаваме

$$y^4 + ay^3 - ay - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 1)(y^2 + ay + 1) = 0.$$

Оттук следва, че ако (*) има повече от 5 различни реални корена, то $a > 2$. Тогава корените на (*) са $0, \pm\sqrt{b_\pm}, \pm\sqrt{a \pm 1}$, където $b_\pm = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Понеже $0 < b_- < a - 1 < b_+ < a + 1$, то при $a > 2$ (*) има 9 различни реални корена.

Оценяване. (6 т.) 3 т. за $(y - 1)(y + 1)(y^2 + ay + 1) = 0$ и 3 т. за довършване на решението.

3. Да се намерят всички естествени числа x и y , за които $x^2 + y^2$ дели $x^3 - 2y$ и $y^3 - 2x$.

Решение. Нека p е просто число, $p^m|x$, $p^n|y$, но $p^{m+1} \nmid x$, $p^{n+1} \nmid y$. Можем да считаме, че $m \geq n \geq 0$. Тогава $p^{2n}|x^2 + y^2|x^3 + 2y$, $p^{2n}|x^3$ и значи $p^{2n}|2y$. Следователно $n = 0$ или $n = 1$, $p = 2$.

От друга страна, $x^2 + y^2|x(x^2 + y^2) - (x^3 - 2y) = y(xy + 2)$.

Ако $n = 0$, то $\text{НОД}(x, y) = 1$ и значи $x^2 + y^2|xy + 2$. В частност, $(x - y)^2 + xy \leq 2$, откъдето $x = y = 1$, което не е решение.

Ако $n = 1$, то $\text{НОД}(x, y) = 2$. Полагаме $x = 2u$, $y = 2v$ и получаваме, че $u^2 + v^2$ дели $2u^3 - v$ и $2v^3 - u$. Тогава $u^2 + v^2|2u(u^2 + v^2) - (2u^3 - v) = v(2uv + 1)$. Понеже $(u, v) = 1$, то $u^2 + v^2|2uv + 1$.

В частност, $(u - v)^2 \leq 1$, откъдето $u = v \pm 1$. И така, $(x, y) = (2k, 2k + 2), (2k + 2, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$, които са решения.

Оценяване. (7 т.) 2 т. за $\text{НОД}(x, y) \leq 2$, 2 т. за $\text{НОД}(x, y) = 1$ и 3 т. за $\text{НОД}(x, y) = 2$.

4. Нека n е естествено число. Да се намери цялата част на числото

$$4 \left(\sqrt{2^0(2^0 + 1)} + \sqrt{2^1(2^1 + 1)} + \cdots + \sqrt{2^n(2^n + 1)} \right).$$

Решение. Директно се проверява, че при $x > 0$ е в сила

$$0 < x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)} < \frac{1}{8x}.$$

Следователно за даденото число S имаме

$$0 < \sum_{i=0}^n (2^{i+2} + 2) - S < \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{i+1}} < 1$$

и значи $[S] = 2^{n+3} + 2n - 3$.

Оценяване. (7 т.) 2 т. за $[S] \leq 2^{n+3} + 2n - 3$ и 5 т. за $[S] \geq 2^{n+3} + 2n - 3$.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.