СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“– СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

5 декември 2015 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

За вярно решение на всяка от задачите 1 и 2 се присъждат по 6 точки. За вярно решение на всяка от задачите 3 и 4 се присъждат по 7 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори.
Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 24.12.2015 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Даден е неравностранен остроъгълен триъгълник ABC. Правата през ортоцентъра H и центъра O на описаната окръжност пресича страните AC и BC в точки P и Q така, че $HP = OQ$. Да се намери $\sphericalangle ACB$.

2. Нека a е реален параметър. Да се докаже, че ако уравнението

$$(x^3 - ax)^3 - a(x^3 - ax) = x$$

има повече от 5 различни реални корена, то има 9 различни реални корена.

3. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които $x^2 + y^2$ дели $x^3 - 2y$ и $y^3 - 2x$.

4. Нека n е естествено число. Да се намери цялата част на числото

$$4\left(\sqrt{2^0(2^0+1)} + \sqrt{(2^1(2^1+1)} + \cdots + \sqrt{2^n(2^n+1)}\right).$$