Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2016 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

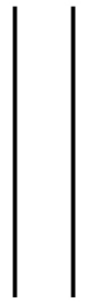
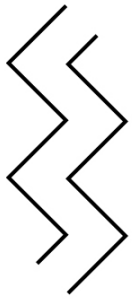
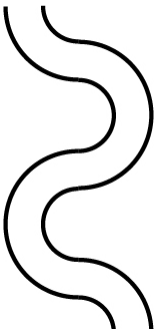
1. Сумата от годините на Тома и Иван е 23, сумата от годините на Иван и Алекс е 24, а сумата от годините на Тома и Алекс е 25. На колко години е най-големият от тримата?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

2. Сумата $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ е равна на:

A) $\frac{3}{111}$ **B)** $\frac{111}{1110}$ **C)** $\frac{111}{1000}$ **D)** $\frac{3}{1000}$ **E)** $\frac{3}{1110}$

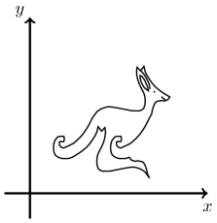
3. По-долу са изобразени 5 различни реки. За коя от тях е нарушено условието: „Възможно най-късият мост, построен от произволна точка на единия бряг на реката до другия, има постоянна дължина.“?

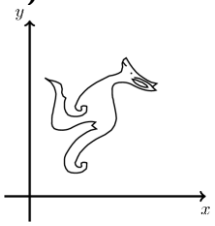
A)  **B)**  **C)** **D)** **E)** 

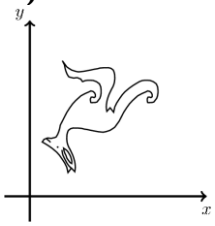
4. Колко са целите числа, които са по-големи от 2015.2017 и са по-малки от 2016.2016?

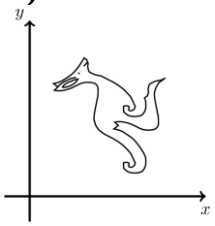
A) 0 **B)** 1 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

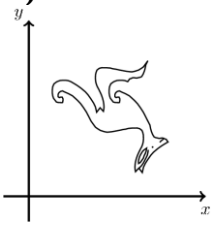
5. Множество от точки в равнината спрямо правоъгълна координатна система xy представлява изображение на кенгуру, както е показано на фигурата. Ако координатите x и y на всяка точка се разменят, какъв ще е резултатът?

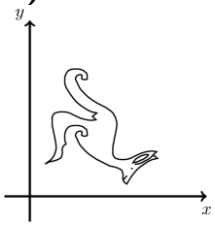


A) 

B) 

C) 

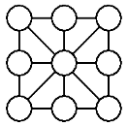
E) 

D) 

6. С колко най-малко равнини може да се ограничи част от пространството така, че разстоянието между кои да е две нейни точки да не надминава фиксирано число?

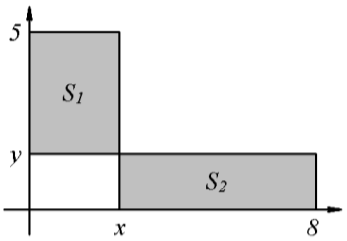
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

7. Кръгчетата от диаграмата са свързани с отсечки, както е показано. Разглеждаме осемте малки триъгълника, чиито върхове са кръгчета и върху страните на които няма други кръгчета. Попълнете кръгчетата с числа така, че сумата на числата във върховете на всеки триъгълник е една и съща. Колко най-много различни числа могат да се използват за това попълване?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** повече от 4

8. Правоъгълниците S_1 и S_2 на чертежа имат равни лица. Намерете отношението $\frac{x}{y}$.

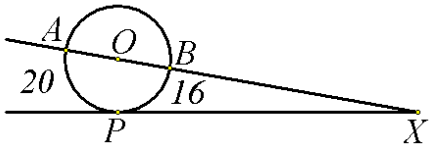


A) 1 **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{7}{4}$ **E)** $\frac{8}{5}$

9. Ако $x^2-4x+2=0$, то $x+\frac{2}{x}$ е равно на:

A) -4 **B)** -2 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 4

10. Дължините на по-малките дъги AP и BP от чертежа са съответно 20 и 16. Тогава градусната мярка на $\sphericalangle AXP$ е равна на:

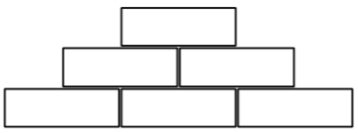


A) 30° **B)** 24° **C)** 20° **D)** 15° **E)** 10°

11. Целите положителни числа a, b, c и d удовлетворяват равенствата $a+2=b-2=c.2=d:2$. Кое от четирите числа a, b, c и d е най-голямо?

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** не може да се определи по единствен начин

12. Във всеки правоъгълник на пирамидата е записано по едно число така, че числото във всеки от правоъгълниците над основата е равно на произведение на числата, записани в двата правоъгълника точно под него. Кое от посочените в отговорите числа не може да се появи на върха, ако правоъгълниците от основата съдържат естествени числа, които са по-големи от 1?



A) 56 **B)** 84 **C)** 90 **D)** 105 **E)** 220

13. Ако $x_1=2$ и $x_{n+1}=x_n^{x_n}$ $(n>1)$, то x_4 е равно на:

A) 2^{2^3} **B)** 2^{2^4} **C)** $2^{2^{11}}$ **D)** $2^{2^{16}}$ **E)** $2^{2^{768}}$

14. В правоъгълника $ABCD$ дължината на страната BC е равна на половината от дължината на диагонала AC. Нека M е такава точка от страната CD, че $AM=MC$. Намерете $\sphericalangle CAM$.

A) 12.5° **B)** 15° **C)** 27.5° **D)** 42.5° **E)** друг отговор

15. Правоъгълник $ABCD$ $(AB>AD)$ с лице 2016 е разрязан на 56 еднакви квадрата. Дължините на страните на правоъгълника и на квадратите са цели числа. Колко са различните възможности за размерите на правоъгълника $ABCD$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

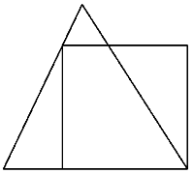
16. Всеки жител на един остров е или рицар, или лъжец. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. При посещение на острова един пътешественик попаднал на седем местни жители, които били седнали около лагерен огън. Всеки от тях му казал: „Аз седя между двама лъжци.“ Колко са лъжците около лагерния огън?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** не може да се определи

17. Уравненията $x^2+ax+b=0$ и $x^2+bx+a=0$ $(a\neq b)$ имат реални корени. Ако сумата от квадратите на корените на първото уравнение е равна на сумата от квадратите на корените на второто уравнение, то $a+b$ е равно на:

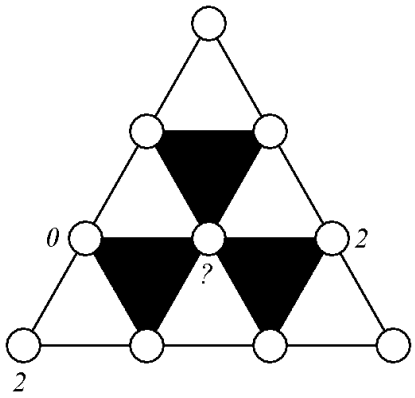
A) 0 **B)** -2 **C)** 4 **D)** -4 **E)** не може да се определи

18. Ако периметърът на квадрата от фигурата е равен на 4, то периметърът на равностранния триъгълник е равен на:



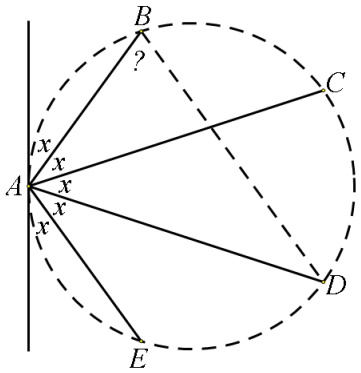
A) 4 **B)** $3+\sqrt{3}$ **C)** 3 **D)** $3+\sqrt{2}$ **E)** $4+\sqrt{3}$

19. Всяка от десетте точки на фигурата е отбелязана с 0, с 1 или с 2. Известно е, че сумата на числата във върховете на всеки бял триъгълник се дели на 3, докато сумата на числата във върховете на всеки черен триъгълник не се дели на 3. Три от точките са отбелязани, както е показано на фигурата. Кои числа могат да се използват за отбелязване на централната точка?



A) само 0 **B)** само 1 **C)** само 2 **D)** само 0 и 1 **E)** или 0, или 1, или 2

20. Бетина отбелязала пет точки A, B, C, D и E върху окръжност така, че допирателната към окръжността в точката A и четирите хорди, свързващи A с останалите точки, образуват пет ъгъла, които са равни на x. Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ABD$.



A) 66° **B)** 70,5° **C)** 72° **D)** 75° **E)** 77,5°

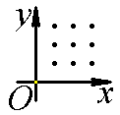
21. Колко различни реални решения има уравнението $(x^2-4x+5)^{x^2+x-30}=1$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** безброй много

22. Четириъгълник е описан около окръжност. Периметърът на четириъгълника се отнася към дължината на окръжността, както $4:3$. Отношението на лицето на четириъгълника към лицето на кръга, определен от окръжността, е равно на:

A) $4:\pi$ **B)** $3\sqrt{3}:\pi$ **C)** $16:9$ **D)** $\pi:3$ **E)** $4:3$

23. Колко квадратни функции на x имат графики, минаващи през поне три от отбелязаните точки?



A) 6 **B)** 15 **C)** 19 **D)** 22 **E)** 27

24. В правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха A ъглополовящите на острите ъгли се пресичат в точка P. Ако разстоянието от P до хипотенузата е $\sqrt{8}$, да се намери разстоянието от P до A.

A) 8 **B)** 3 **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{12}$ **E)** 4

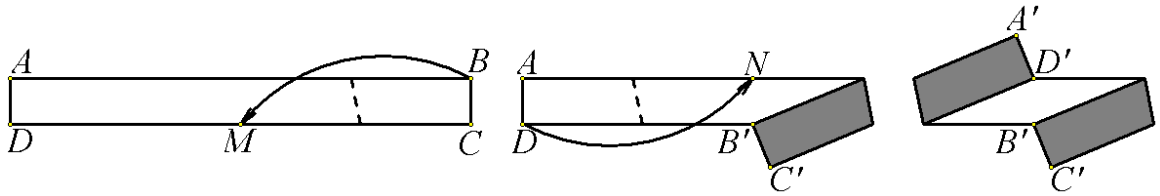
25. Три трицифрени числа са образувани с цифрите от 1 до 9, като всяка цифра е използвана точно веднъж. Кое от следващите числа не може да е равно на сумата на тези три числа?

A) 1500 **B)** 1503 **C)** 1512 **D)** 1521 **E)** 1575

26. Куб е разделен на шест пирамиди чрез свързване на дадена точка от вътрешността му с върховете на куба. Обемите на пет от тези пирамиди са 2, 5, 10, 11 и 14. Намерете обема на шестата пирамида?

A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

27. Хартиена лента във форма на правоъгълник $ABCD$ с ширина $5\,cm$ и дължина $50\,cm$ е оцветена от едната страна в бяло, а от другата – в сиво. Кристина прегъва лентата така, че върхът B съвпада със средата M на страната CD. След това тя отново прегъва лентата така, че върхът D съвпада със средата N на страната AB. Намерете лицето в квадратни сантиметри на видимата бяла част от лентата.

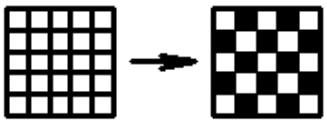


A) 50 **B)** 60 **C)** 62.5 **D)** 100 **E)** 125

28. Ани избира едно естествено число n и намира сумата s на всички естествени числа от 1 до n. Простото число p дели сумата s, но не дели нито едно от събираемите й. Кое от посочените числа може да е равно на $n+p$?

A) 217 **B)** 221 **C)** 229 **D)** 245 **E)** 269

29. Даден е квадрат 5×5, разделен на 25 единични квадратчета, които първоначално са бели. Едно преобразуване на квадрата се състои в промяна на цвета на три последователни единични квадратчета в един ред или в един стълб (белите квадратчета стават черни, а черните – стават бели). Намерете възможно най-малкия брой преобразувания, които са необходими, за да се получи шахматното оцветяване вдясно от дадения квадрат.



A) по-малко от 10 **B)** 10 **C)** 12 **D)** повече от 12 **E)** оцветяването не е възможно

30. Положителното число N има точно шест различни положителни делителя, включително 1 и N. Произведението на пет от тези делители е 648. Кое от посочените числа е шестият делител на N?

A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 24