Математически турнир „Иван Салабашев“, 2018 г.

Решения на задачите от темата за 10–12 клас

Задача 1. Съществуват ли два различни квадратни тричлена $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти такива, че $P(P(x)) - Q(Q(x))$ е линейна функция?

Решение. Не. Нека $P(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $Q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $a_1a_2 \neq 0$. Тогава

$$P(P(x)) = a_1(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2 + b_1(a_1x^2 + b_1x + c_1) + c_1$$

$$(1) \qquad = a_1^3x^4 + 2a_1b_1x^3 + a_1(2a_1c_1 + b_1^2 + b_1)x^2 + \dots$$

Ако $P(P(x)) - Q(Q(x))$ е линейна функция, то

$$(2) \quad a_1^3 = a_2^3,\ a_1b_1 = a_2b_2,\ a_1(2a_1c_1 + b_1^2 + b_1) = a_2(2a_2c_2 + b_2^2 + b_2),$$

откъдето последователно $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

Оценяване. По 2 т. за (1) и (2), и по 1 т. за $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$.

Задача 2. Нека $f_1(x) = |x + 1|$ и $f_{n+1}(x) = |x + f_n(x)|$ $(n \geq 1)$. Да се реши уравнението $f_{2018}(x) = 0$.

Решение. (1) Ще докажем, че корените на $f_{2n}(x) = 0$ са $-1/2, -1/4, \dots, -1/(2n)$. При $n = 1$ това е вярно. Понеже $f_{2k+2}(x) = |x + |x + f_{2k}(x)||$, то корените на $f_{2k+2}(x) = 0$ са отрицателните корени на $f_{2k}(x) = 0$ и $f_{2k}(x) = -2x$. Сега нашето твърдение ще следва по индукция, ако докажем, че (*) $-1/(2k+2)$ е единственият отрицателен корен на $f_{2k}(x) = 2x$. След полагането $t = -1/x > 0$ получаваме $g_{2k}(t) = 2$, където $g_1(t) = |t - 1|$ и $g_{l+1}(t) = |g_l(t) - 1|$. Непосредствено се проверява, че g_{2k} приема последователно стойности 0 и 1 в точките $0, 1, \dots, 2k$, като между тях е линенйа функция. Освен това, $g_{2k}(t) = t - 2k$ при $t > 2k$, откъдето следва (*).

Оценяване. 2 т. за свеждане до $g_{2k}(t) = 2$ $(t > 0)$, 4 т. за доказателство на (*) (1 т. за $g_{2k}(2k+2) = 2$) и 1 т. за отговор.

Задача 3. Дадени са две неперпендикулярни прави AB и l $(A \in l)$. Окръжност k се допира до l в A и пресича отсечката AB. Нека BC и BD са допирателни към k $(C, D \in k)$. Да се докаже, че правата CD минава през постоянна точка, независеща от k.

Решение. Нека O е центърът на k, $E = OB \cap CD$, $F = s_{AB} \cap l$ и $G = FB \cap CD$. Понеже $OA^2 = OC^2 = OE.OB$, то $\triangle AOB \sim \triangle EOA$ и следователно (1) $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OEA$. Можем да считаме, че $\sphericalangle AEC < 90°$. Тогава

$$\sphericalangle AEC = 90° - \sphericalangle OEA = 90° - \sphericalangle OAB = \sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA.$$

Значи (2) $AGBE$ е вписан в окръжност четириъгълник. Оттук (3) $\sphericalangle BAG = \sphericalangle BEG = 90°$ и следователно G е постоянна точка.

Оценяване. По 2 т. за (1), (2), (3) и 1 т. за $\sphericalangle AEC = \sphericalangle (l, AB)$.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.