Математически турнир „Иван Салабашев“, 2018 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Нека a, b, c са числа, за които $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ и $\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$. Числото $\frac{3a-2b}{b+2c}$ е равно на:

А) $\frac{1}{4}$ **Б)** $\frac{1}{3}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 1

Отговор: Б). Имаме

$$\frac{3a-2b}{b+2c} = \frac{3\frac{a}{b}-2}{2\frac{c}{b}+1} = \frac{4-2}{5+1} = \frac{1}{3}.$$

2. Броят на решенията на уравнението $|x-1| + |x+1| = 2018$ е равен на:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: В). Лявата страна на уравнението е равна на $-2x$ при $x \leq -1$, на 2 при $-1 \leq x \leq 1$ и на $2x$ при $x \geq 1$. Следователно уравнението има две решения $x = -1009$ и $x = 1009$.

3. Иван е на 14 години, а баща му е три пъти по-възрастен от него. След колко години бащата на Иван ще е два пъти по-възрастен от него? **А)** 10 **Б)** 12 **В)** 14 **Г)** 16

Отговор: В). Бащата на Иван е на $3.14 = 42$ години. Нека след x години той е два пъти по-възрастен от него. Тогава $42 + x = 2(14 + x)$, т.е. $x = 14$.

4. В склад на верига спортни магазини има 500 топки, като 80% от тях са червени, а останалите сини. Колко червени топки трябва да се продадат, така че 75% от останалите топки да са червени. **А)** 50 **Б)** 75 **В)** 100 **Г)** 150

Отговор: В). Броят на червените топки в склада е $\frac{500.80}{100} = 400$, а този на сините е 100. Те са 25%, т.е. $\frac{1}{4}$ от останалите топки. Следователно техният брой е 400 и са продадени 100 червени топки.

5. Сумата на простите числа по-малки от 100, които при деление на 4 дават остатък 1 и при деление на 7 дават остатък 6 е равна на:

А) 141 **Б)** 151 **В)** 161 **Г)** 171

Отговор: Б). Просто число p има дадените свойства, ако $p = 4k + 1 = 7l + 6$, където k и l са естествени числа. Оттук $1 \leq l \leq 13$ е нечетно число и с директна проверка се вижда, че $p = 13, 41, 97$. Сумата на тези числа е 151.

6. Най-малката стойност на израза

$$a^2 + b^2 - ab - a - b$$

е равна на:

А) -2 **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** 2

Отговор: Б). Имаме

$$a^2 + b^2 - ab - a - b = \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 - 2}{2} \geq -1.$$

Равенство се достига при $a = b = 1$.

7. Нека $ABCD$ е правоъгълен трапец с основи AB и CD, за който $AB = 2BC, AB > CD$ и DB е ъглополовящата на $\sphericalangle ADC$. Ъгъл $\sphericalangle DBC$ е равен на:

А) 15° **Б)** 20° **В)** 25° **Г)** 30°

Отговор: А). Тъй като $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle DBA$, то $AD = AB = 2BC$. Следователно $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, защото ако $\sphericalangle BAD = 90^\circ$,то $AD < BC$, което е противоречие. Нека H е петата на перпендикуляра от A до правата CD. Тогава $AD = 2BC = 2AH$ и следователно $\sphericalangle ADH = 30^\circ$. Оттук $\sphericalangle ADC = 150^\circ$, $\sphericalangle BDC = 75^\circ$ и $\sphericalangle DBC = 15^\circ$.

8. Средното аритметично на четирицифрените числа с първа цифра 3 и последна цифра 4, които се делят на 36 е равно на:

А) 3464 **Б)** 3474 **В)** 3484 **Г)** 3494

Отговор: Б). Нека втората и третата цифра на такова число са a и b. Тогава $10b + 4$ се дели на 4 и $a + b + 7$ се дели на 9. Следователно $b = 0, 2, 4, 6, 8$ и съответно $a = 2$, 0 или 9,7, 5, 3. Търсеното средно аритметично е равно на

$$3.10^3 + 10^2.\frac{2+0+9+7+5+3}{6} + 10.\frac{0+2+2+4+6+8}{6} + 4 = 3474.$$

9. Нека p и q са прости числа, за които

$$pq + 2p^2q + 4q^2p = 1365.$$

Числото $2q + 4p$ е равно на:

А) 24 **Б)** 34 **В)** 44 **Г)** 54

Отговор: Б). Даденото равенство записваме във вида $pq(1 + 2p + 4q) = 3.5.7.13$. Лесно се проверява, че p и q са различни от 3 и 13 (Защо?). Тогава $p = 5, q = 7$, защото случаят $p = 7, q = 5$ е невъзможен. Следователно $2q + 4p = 34$.

10. Нека $ABCD$ е квадрат със страна 10 и E е точка върху диагонала AC. Правата през E успоредна на AD пресича страните AB и CD в точки M и N, така че

$$\frac{AM}{CN} + \frac{MB}{ND} = 18.$$

Сумата на лицата на четириъгълниците $AEND$ и $BMEC$ е равна на:

А) 45 **Б)** 50 **В)** 55 **Г)** 60

Отговор: В). Нека $AM = a$ и $BM = b$. От условието следва,че $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 18$ и $a + b = 10$. Тогава $a^2 + b^2 = 18ab$ и $a^2 + 2ab + b^2 = 100$. Оттук $ab = 5$ и $a^2 + b^2 = 90$. Следователно

$$S_{AEND} + S_{BMEC} = S_{ABCD} - S_{AME} - S_{CNE} =$$

$$10^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} = 55.$$

11. За всяка естествено число n нека $s(n)$ е сумата на цифрите на числото $2^{n-1}.3^n.5^{n+1}$. Да се намери най-малката стойност на $s(n)$.

Отговор: 9. Тъй като $2^{n-1}.3^n.5^{n+1} = 25.3^n.10^{n-1}$ следва, че $s(n)$ е сумата на цифрите на числото $A_n = 25.3^n$. Тогава $A_1 = 75$ и $s(1) = 12$. При $n \geq 2$ числото A_n се дели на 9 и значи $s(n)$ също се дели на 9. Тъй като $A_2 = 225$, то $s(2) = 9$ и това е най-малката стойност на $s(n)$.

12. Дължините на височините на триъгълник са естествени числа. Ако две от тях са 20 и 100, колко най-дълга може да е третата височина?

Отговор: 24. Нека ABC е триъгълник с височина 100 към AB и височина 20 към AC. От формулата за лице на триъгълник следва, че $100.AB = 20.AC$, т.е. $AC = 5AB$. От неравенството на триъгълника $BC + AB > AC$, т.е. $BC > 4AB$. Нека h е дължината на третата височина. Тогава $h = \dfrac{100.AB}{BC} < 25$ и понеже h е цяло число най-голямата му стойност е 24. Лесно се проверява, че съществува триъгълник с дължини на височините $20, 24, 100$.

13. Да се намерят всички естествени числа a, за които числото $32.3^a + 1$ е точен квадрат.

Отговор: $a = 2$. Нека $32.3^a + 1 = b^2$. Тогава $(b+1)(b-1) = 2^5.3^a$ и следователно

$$b + 1 = 2^c 3^d, b - 1 = 2^e 3^f,$$

като $c + e = 5, d + f = a$. От $2^c 3^d - 2^e 3^f = 2$ следва, че едно от числата c и e е равно на 1. Ако $c = 1$, то $e = 4$ и $3^d = 8.3^f + 1$. Дясната част на последното равенство се дели на 3 само при $f = 0$. Тогава $d = 2$ и $a = 2$. Ако $e = 1$, то $c = 4$ и $3^f = 8.3^d - 1$, което е невъзможно.

14. Нека $f(x)$ е полином с реални коефициенти, за който $(f(x))^2 = f(f(x))$ за всяко реално число x. Да се намери $f(10)$.

Отговор: $f(10) = 100$. Нека степента на $f(x)$ е $n \geq 1$ и $a_n \neq 0$ е коефициентът пред x^n. Тогава степените на полиномите $(f(x))^2$ и $f(f(x))$ са съответно $2n$ и n^2. Следователно $2n = n^2$, т.е. $n = 2$. Нека $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Даденото равенство приема вида

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c.$$

След сравняване на коефициентите пред x^4 получаваме $a = 1$ и $b(x^2+bx+c)+c = 0$, т.е. $b = c = 0$. Ясно е, че полиномът $f(x) = x^2$ изпълнява даденото равенство. Следователно $f(10) = 100$.

15. По колко начина числото 2018 може да се представи във вида $a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$, където a, b, c, d са цели числа, за които $0 \leq a, b, c, d \leq 99$.

Отговор: 202. Ако a и c са такива, че

$$0 \leq a.10^3 + c.10 \leq 2018, \quad (*)$$

то съществуват единствени b и d, за които $b.10^2 + d = 2018 - a.10^3 - c.10$. Ако $a = 0$ или $a = 1$, то всяко $0 \leq c \leq 99$ изпълнява (*). Ако $a = 2$, то $c = 0, 1$. Следователно търсеният брой е $100 + 100 + 2 = 202$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.