## Математически турнир „Иван Салабашев“, 2018 г.
## Решения на задачите от темата за 7. клас

**1.** Стойноста на израза $\dfrac{1.2.3 + 2.4.6}{1.3.5 + 2.6.10}$ е:

**А)** $\dfrac{1}{3}$; **Б)** $\dfrac{2}{5}$; **В)** $\dfrac{1}{5}$; **Г)** $\dfrac{3}{5}$.

**Отговор: Б).** Имаме $\dfrac{1.2.3 + 2.4.6}{1.3.5 + 2.6.10} = \dfrac{54}{135} = \dfrac{2}{5}$.

**2.** При разлагането на множители на моногочлена $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9$ единият от множителите е равен на:

**А)** $x - 2y + 3$; **Б)** $x + 2y - 3$; **В)** $2x - y + 3$; **Г)** $x - 2y + 1$.

**Отговор: А).** Имаме $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 = (x - 2y)^2 - 3^2 = (x - 2y - 3)(x - 2y + 3)$.

**3.** Дадено е числото 321321321321. От него са изтрити няколко цифри, така че е получено възможно най-голямото число, което се дели на 9. Сборът на последните четири цифри на полученото число е равен на:

**А)** 6; **Б)** 7; **В)** 5; **Г)** 9.

**Отговор: А).** Сборът от цифрите на даденото число е 24. За да получим възможно най-голямо число, което се дели на 9, трябва да изтрием две тройки и тези тройки трябва да са последните две. Последните 4 цифри на новото число са 1, 2, 1, 2 със сбор 6.

**4.** 13 юли 2018 година беше петък. През коя следваща година 13 юли отново ще бъде петък?

**А)** 2028; **Б)** 2030; **В)** 2027; **Г)** 2029.

**Отговор: Г).** Имайки предвид, че високосните години имат 366 дни, което число дава остатък 2 при деление на 7, а обикновенната година има 365 дни, което число дава остатък 1 при деление на 7, пресмятаме, че изминатите дни до 13 юли за пъри път ще се делят на 7 за пъри път през 2029 година.

**5.** Броят на триъгълниците, с дължини на страните цели числа и периметър 10 е равен на:

**А)** 2; **Б)** 36; **В)** 3; **Г)** 5.

**Отговор: А).** Ако $a \le b \le c$ са страните на триъгълника, то $a + b > c$, откъдето $10 - c > c$, т.е. $c < 5$. Освен това $3c \ge a + b + c = 10$, т.е. $c \ge 4$. Следователно $c = 4$, откъдето $a + b = 6$ и с директна проверка намираме, че има само две решения – $a = 2, b = 4$ и $a = b = 3$.

**6.** В редица са записани 2018 естествени числа. Второто число е 7, а сборът на всеки четири последователни числа е равен на 30. Колко е последното число в редицата?

**А)** 10; **Б)** 8; **В)** 7; **Г)** 15.

**Отговор: В).** Ако означим с $S$ сбора на числата от 3-то до 2017-то включително, то $7 + S = 672.30$, защото числата от 2 до 2017 могат да се групират в четворки последователни. Аналогично, ако $x$ е последното число, то $x + S = 672.30$, откъдето $x = 7$.

**7.** Намерете най-голямата стойност на израза $\dfrac{2 + |a + 1,3|}{0,4 + |a + 1,3|}$.

**А)** $\frac{15}{7}$; **Б)** 5; **В)** $\frac{33}{7}$; **Г)** 4.

**Отговор: Б).** Тъй като

$$\frac{2+|a+1,3|}{0,4+|a+1,3|}=1+\frac{1,6}{0,4+|a+1,3|},$$

то най-голямата стойност ще се получи, ако знаменателят на последната дроб е минимелан, т.е. при $a=-1,3$. Тогава стойността на израза е 5.

**8.** Колоездач се движи от град $A$ към град $B$, а автомобил се движи в обратна посока – от град $B$ към град $A$. Те тръгват едновременно и се движат с постоянни скорости. След срещата им времето на колоездача до края на пътуването му е 25 пъти по-дълго от от времето на колата до края на нейното пътуване. Отношението на скоростите на колоездача и колата е:

**А)** $\frac{1}{3}$; **Б)** $\frac{1}{5}$; **В)** $\frac{2}{3}$; **Г)** $\frac{1}{10}$.

**Отговор: Б).** Нека $v_1$ и $v_2$ са скоростите на колоездача и автомобила, а $S_1$ и $S_2$ е изминатия от тях път до срещата. Тогава $\frac{S_1}{S_2}=\frac{v_1}{v_2}$. Времето на колоездача и автомобила след срещата са съответно $\frac{S_2}{v_1}$ и $\frac{S_1}{v_2}$. Следователно

$$\frac{S_2}{v_1}=25.\frac{S_1}{v_2} \iff \frac{v_1}{v_2}.\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{25} \iff \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2=\frac{1}{25} \iff \frac{v_1}{v_2}=\frac{1}{5}.$$

**9.** Намерете сумата на различните прости делители на числото $13^{15}+14.13^{13}-14.13^{14}+14.13^{11}-14.13^{12}-13^{10}$.

**А)** 20; **Б)** 22; **В)** 18; **Г)** 26.

**Отговор: В).** Изразът е равен на $2^2.3.13^{10}$ и сборът от простите делители е $2+3+13=18$.

**10.** Ако $A=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}-\frac{2}{36}$ и $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\cdots+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}-\frac{3}{36}$, то $B-A$ е равно на:

**А)** $\frac{181}{660}$; **Б)** $\frac{23}{132}$; **В)** $\frac{21}{110}$; **Г)** $\frac{91}{330}$.

**Отговор: А).** Имаме:

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{36}-\left(\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\cdots+\frac{3}{36}\right)=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{36}$$

$$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{36}-\left(\frac{4}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{4}{36}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{36}.$$

Следователно

$$B-A=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{181}{660}.$$

**11.** Около кръгла маса седнали 10 човека, всеки от които е или рицар или лъжец. Рицарят винаги казва истината, а лъжецът винаги лъже. Двама от тях казали: „Двамата ми съседи

са лъжци“, а останалите 8 казали: „Двамата ми съседи са рицари“. Да се определи сборът от всички възможни стойности на броя на рицарите.

**Отговор: 3.** Ако има рицар казал втората фраза, то двамата му съседи са рицари. Всеки от тях не може да е казал първата фраза и следователно техните съседи също са рицари. Така получаваме, че всички са рицари, което е невъзможно. Следователно всеки рицар е казал първата фраза, т.е. рицарите са 1 или 2. Лесно се построяват съответните примери.

**12.** Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB$ и $CD$. Точки $M$ и $N$ лежат съответно върху отсечките $AB$ и $CD$. Правите $AN$ и $DM$ се пресичат в точка $P$, а правите $BN$ и $CM$ се пресичат в точка $Q$. Ако лицата на триъгълниците $ADP$, $PQM$ и $BCQ$ са съответно 10 $\text{cm}^2$, 15 $\text{cm}^2$ и 18 $\text{cm}^2$, да се намери лицето на триъгълник $PQN$.

**Отговор: 13 $\text{cm}^2$.** От това, че $AMND$ и $BMNC$ са трапци, следва че $S_{ADP} = S_{MNP}$ и $S_{BCQ} = S_{MNQ}$. Следователно $S_{MPNQ} = 10 + 18 = 28$ $\text{cm}^2$ и $S_{PQN} = S_{MPNQ} - S_{PQM} = 13$ $\text{cm}^2$.

**13.** Да се намери най-малкото естествено число, което се дели на 99 и се записва само с четни цифри.

**Отговор: 228888.** Нека $X$ и $Y$ е сборът на цифрите на четни и нечетни места съответно. Тогава 9 дели $x+y$ и 11 дели $x-y$. Понеже $x$ и $y$ са четни, имаме че 18 дели $x+y$ и 22 дели $x-y$. Ако $x+y=18$, то от $|x-y| \leq x+y$ следва, че $x=y$ и тогава $x=y=9$, което е невъзможно. Ако $x+y \geq 54$, то числото е поне 7 цифрено, защото $6.8 < 54$. При $x+y=36$, то $|x-y|=22$ води до $x=29$ или $y=29$, противоречие. Следователно $x=y=18$, т.е. числото е поне 6 цифрено. Числото 228888 е минималното с исканото свойство.

**14.** Върху окръжност са разположени 1000 ненулеви числа, които са оцветени през едно в бял и черен цвят. Всяко черно число е равно на сбора на двете му съседни бели числа, а всяко бяло число е равно на произведението на двете му съседни черни числа. Да се намери сумата на всички числа.

**Отговор: 375.** Нека $x$ и $y$ са две последователни черни числа. Започвайки от $x$ числата са:

$$x, xy, y, y(1-x), 1-x, (1-x)(1-y), 1-y, x(1-y), x, xy, \ldots$$

което означава, че числата се повтарят с период 8, като сумата на числата в една осмица е 3. Общата сума е $\frac{1000}{8}.3 = 375$.

**15.** В една държава банкнотите са със стойности 7, 13 и 25, като от всеки вид има неограничено количество. Да се намери броят на целите числа $x$, където $40 \leq x \leq 2018$, за които сумата $x$ може да се изплати точно с помощта на тези банкноти.
(Не е задължително използването на банкноти и от трите вида.)

**Отговор: 2.** Имаме $40 = 2.7+2.13$, $41 = 4.7+13$ и $42 = 6.7$, а лесно се вижда, че 43 и 44 не могат да се получат по този начин. Числата 45, 46, 47, 48, 49, 50 и 51 са 7 последователни числа, всяко от които може да се представи във вида $7x+13y+25z$. Следователно всички числа, по-големи от 51 също могат да се представят по този начин (достатъчно е да прибавяме банкноти от 7).

**Забележка: В 7 клас в 15 задача, в условието се търси броя на числата, които МОЖЕ, а посоченият отговор 2 е всъщност броя на числата, за които НЕ може.**
**Верният отговор е 2018 - 39 - 2 = 1977**