Математически турнир „Иван Салабашев“, 2018 г.
Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Стойността на израза $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$ е:

А) $-\frac{11}{60}$ **Б)** $-\frac{13}{60}$ **В)** $\frac{1}{10}$ **Г)** $-\frac{1}{6}$

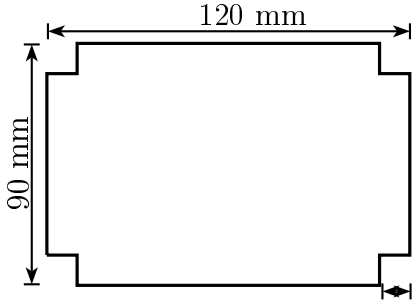
Отговор: Б).

2. Ако $\frac{3}{2}$ от x е 162, то $\frac{5}{9}$ от x е равно на:

А) 60 **Б)** 45 **В)** 90 **Г)** 110

Отговор: А). Тъй като $x = \frac{2}{3}.162 = 108$, то $\frac{5}{9}.108 = 60$

3. От правоъгълник с дължина 120 cm и широчина 90 cm са изрязани четири квадрата със страна 14 cm, както е показано на чертежа и от получената фигура е сглобена кутия. Намерете обема на получената кутия в кубични сантиметри.



А) 92250 **Б)** 10800 **В)** 81000 **Г)** 110000

Отговор: В). Получената кутия е с размери $90 \times 60 \times 15$ с обем $90.60.15 = 81000$.

4. Намерете броя на трицифрените числа, които се делят на 9, но не се делят на 5.

А) 100 **Б)** 90 **В)** 80 **Г)** 70

Отговор: В). Трицифрените числа, които се делят на 9, са $9.12, 9.13, \ldots, 9.111$ и броят им е равен на 100. Трицифрените числа, които се делят на 45, са $45.3, 45.4, \ldots, 45.22$ и броят им е равен на 20. Търсеният брой е $100 - 20 = 80$.

5. Теглото на един домат е $\frac{2}{3}$ от теглото на една ябълка, а теглото на две ябълки е $\frac{1}{5}$ от теглото на една диня. Ако домата тежи 200 грама, намерете теглото на една диня в килограми.

А) 1 **Б)** 1,5 **В)** 2 **Г)** 3

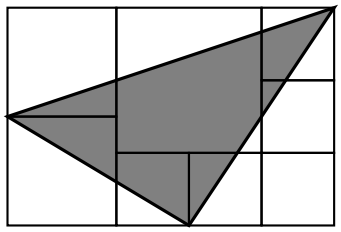
Отговор: Г). Една ябълка тежи 300 грама, две ябълки тежат 600 грама и динята тежи 3000 грама.

6. От числото 234234234 са изтрити три цифри така, че е получено възможно най-малкото естествено число, което се дели на 36. Сборът на цифрата на стотиците и цифрата на хилядите на полученото число е равен на:

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8

Отговор: А). Сборът от цифрите на даденото число е 27. Тъй като след изтриване на три цифри полученото число се дели на 9, тези три цифри трябва да бъдат 3, 3 и 3 или 2, 3 и 4. Ако изтрием 3, 3 и 3 ще получим числото 242424. Нека изтриваме 2, 3 и 4. Понеже искаме да получим число, което се дели на 4, от последните две цифри трябва да изтрием цифрата 3. За да получим най-малкото число трябва да изтрие първата четворка и третата двойка. Получаваме 232344 (което е по-малко от 242424) със сбор на цифрата на стотиците и цифрата на хилядите $3 + 2 = 5$.

7. Правоъгълникът на чертежа е сглобен от 8 квадрата, най-големият от които има лице 64 cm^2.

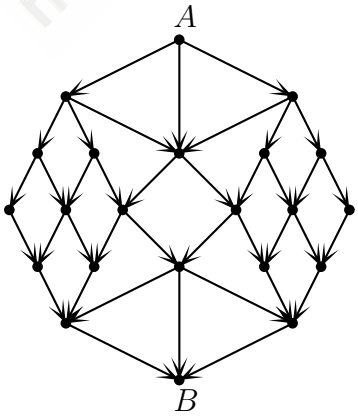


Намерете лицето на сивия триъгълник.

А) 80 **Б)** 84 **В)** 88 **Г)** 92

Отговор: Б). Страните на квадратите са: 8 (на големия квадрат), 4 (на петте малки квадрата) и 6 (на двата средни квадрата). Правоъгълникът има страни 12 cm и 18 cm. Лицата на трите триъгълника са 30 cm^2, 48 cm^2 и 54 cm^2. Следователно лицето на триъгълника е $12.18 - 30 - 48 - 54 = 84$ cm^2.

8. По колко различни маршрута мога да стигна от точка A до точка B на схемата, като се движа по посока на стрелките?



А) 40 **Б)** 42 **В)** 44 **Г)** 46

Отговор: Б). За всяка точка от схемата записваме по колко начина можем да стигнем от A. На първия ред числата са 1, 1. На втория са 1,1,3,1,1; на третия – 1,2,4,4,2,1; на четвъртия – 3,6,8,6,3; на петия – 17,17 и в точка B е числото $17 + 17 + 8 = 42$.

9. Триъгълник ABC и трапец $PQRS$ ($PQ \parallel RS$) имат равни лица. Ако $AB = 40\% PQ = 50\% RS$ и височината на трапеца е 10 cm, колко сантиметра е височината на триъгълника през върха C?

А) 45 **Б)** 40 **В)** 48 **Г)** 50

Отговор: А). Ако $AB = x$, то $PQ = 2,5$ и $RS = 2x$. Тогава $x.h = (2,5x + 2x).10$, откъдето $h = 45$ cm.

10. В редица са записани 2018 естествени числа. Второто число е 9, а сборът на всеки осем последователни числа е равен на 23. Колко е последното число в редицата?

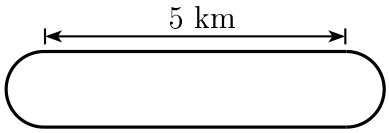
А) 7 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 30

Отговор: В). Ако означим с S сбора на числата от 3-то до 2017-то включително, то $7 + S = 336.30$, защото числата от 2 до 2017 могат да се групират в четворки последователни. Аналогично, ако x е последното число, то $x + S = 336.30$, откъдето $x = 9$.

11. Числото a има 11 делители, включително 1 и самото число. Най-големият общ делител d на a и числото 216 не е равен на 1. Колко е броят на делителите на d?

Отговор: 4. Числото a е от вида p^{10} за някое просто число p. Тъй като $216 = 2^3.3^3$ и $d \neq 1$, то $p = 2$ или $p = 3$. И в двата случая $d = p^3$ и делителите на d са 4.

12. На чертежа е показана състезателна писта, която се състои от два праволинейни участъка всеки с дължина от 5 km и два завоя всеки с формата на полукръг с дължина 1 km. Автомобил се движи по правите участъци със скорост от 120 km/h, а в завоите със скорост от 72 km/h. Намерете средната скорост на автомобила за една пълна обиколка на пистата.



Отговор: 108 km/h. Времето за една пълна обиколка е

$$\frac{10}{120} + \frac{2}{72} = \frac{1}{9}h.$$

Средната скорост е равна на $\frac{12}{\frac{1}{9}} = 108$ km/h.

13. Всяка от клетките на таблица с 3 реда и 4 стълба е оцветена в червено, зелено или синьо. Всяка червена клетка има поне една съседна зелена и поне една съседна синя. Всяка зелена клетка има поне една съседна червена и поне една съседна синя. Всяка синя клетка има поне една съседна червена и поне една съседна зелена.
По колко различни начина може да се направи това оцветяване?
Две клетки са съседни, ако имат обща страна.

Отговор: 36. Да означим цветовете с 1, 2 и 3. Ако започнем от

1			
1			

от условието лесно се попълват няколко клетки и се получава таблицата

1	3	2	
2	3	1	
1	3	2	

и лесно се вижда, че не може да се продължи.

Следователно трябва да започнем от

1			
2			

и отново от условието получаваме

1	2		
3	x		
2	1		

Ако $x = 1$ или 2 (двата случая са еквивалентни), получаваме

1	2	3	
3	1		
2	1	3	

и отново лесно се вижда, че няма такава таблица.

Следователно получаваме

1	2		
3	3		
2	1		

като всички клетки удовлетворяват условието. Тъй като 1, 2 и 3 са цветовете в някакъв ред, то начините за оцвеняване са 6. За другата половина на таблицата имаме също 6 възможности, т.е. общо 36.

14. Дадена е окръжност k. Вътре в окръжността са избрани 5 точки, а извън нея 4 точки. След това всеки две точки са свързани с отсечка. Колко най-много са пресечните точки на тези отсечки с окръжността?

Отговор: 32. Отсечките, свързващи вътрешна и външна точка пресичат окъжността по един път. Отсечка, която свързва две вътрешни точки не пресича окръжността, а отсечка, която свързва две външни точки (има 6 такива отсечки) пресича окръжността в най-много 2 точки. Следователно пресечните точки са най-много $4.5 + 6.2 = 32$. Пример, при който се достига този брой е когато четирите точки са върхове на квадрат, а окръжността е с център, центъра на квадрата и радиус по-голям от половината на страната и по-малък от половината на диагонала.

15. В турнир по шах участвали три отбора. Всеки двама състезатели от различни отбори изиграли по една среща помежду си. Общо всички състезателни имали T точки.
За колко стойности на T, не по-големи от 15, такъв турнир е възможен?
(Отбор може да се състои от един състезател. В шаха за победа се дава 1 точка, за равенство – 0,5 точки и за загуба – 0 точки.)

Отговор: 10. Нека отборите имат съответно a, b и c състезатели. Тъй като всяка партия шах дава 1 точка и изиграните партии са $ab + bc + ca$, търсим броят на числата $T \leq 15$, за които $ab + bc + ca = T$. Тъй като $ab + bc + ca \geq 3$, то $T \geq 3$. При $a = b = 1$ получаваме $2c + 1$, т.е. всички числа $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ могат да бъдат стойности на T. Освен това $8 = 1.2 + 2.2 + 2.1$, $12 = 2.2 + 2.2 + 2.2$ и $14 = 1.2 + 2.4 + 4.1$. Лесно се вижда, че $ab + bc + ca = 4$, $ab + bc + ca = 6$ и $ab + bc + ca = 10$ нямат решения.