МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – СОФИЯ-ГРАД
София 1303, ул. „Антим I”, № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www rio-sofia-grad.com

LXVI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
17.12.2016 г.

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ:

XII КЛАС

Зад. 1. а) Определяме $\cos 2\alpha - 2 < 0$, а от $\alpha \in (0°; 45°]$ следва, че $2\alpha \in (0°; 90°]$ и $0 \le \cos 2\alpha < 1$. *(1 точка)*

Тогава $(\cos 2\alpha - 2)\cos 2\alpha \le 0$ за всяко $\alpha \in (0°; 45°]$. *(1 точка)*

Следователно неравенството $(\cos 2\alpha - 2).\cos 2\alpha \ge 0$ ще има решение само, ако $\cos 2\alpha = 0$.

От последното равенство намираме $2\alpha = 90°$ и $\alpha = 45°$. *(1 точка)*

б) Пресмятаме дискриминантата D на уравнението $x^2 - 2(4 - \cos 2\alpha)x + 16 - 6\cos 2\alpha = 0$:

$D = (4 - \cos 2\alpha)^2 - 16 + 6\cos 2\alpha = \cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha = (\cos 2\alpha - 2).\cos 2\alpha$.

От $D \ge 0$ и подточка а) следва, че $\cos 2\alpha = 0$ и $\alpha = 45°$. *(1 точка)*

Тогава уравнението е $x^2 - 8x + 16 = 0$ с корени $x_1 = x_2 = 4$. *(1 точка)*

Следователно триъгълникът е равнобедрен, с бедро 4 и ъгъл $45°$.

Ако ъгълът е между бедрата на триъгълника, то лицето му е $S = \frac{1}{2}.4^2.\sin 45° = 4\sqrt{2}$.

(1 точка)

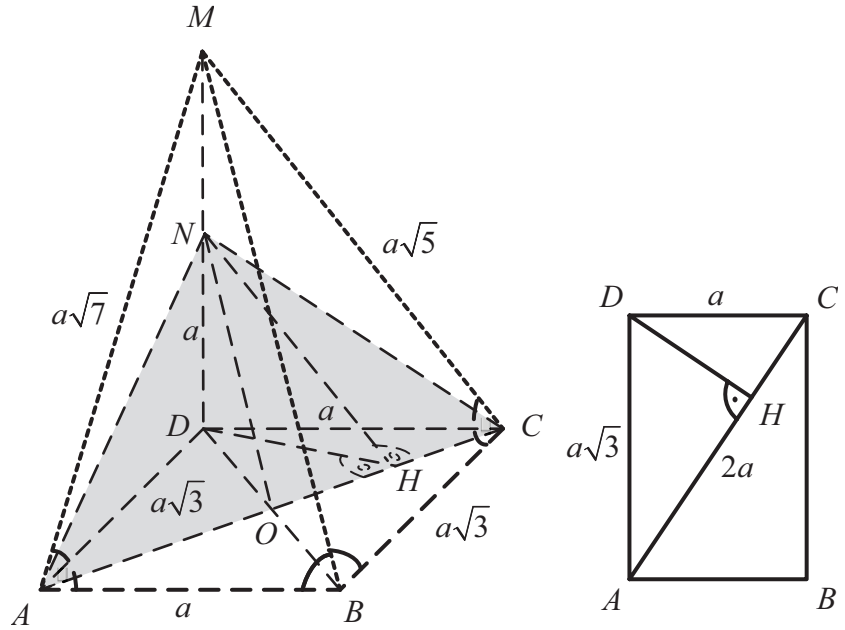
Ако ъгълът е при основата, то триъгълникът е правоъгълен с лице $S = \frac{1}{2}.4^2 = 8$.

(1 точка)

Зад. 2. От $MD \perp (ABCD)$ следва, че $MD \perp AD$ и $MD \perp CD$. От питагоровата теорема в ΔADM и ΔCDM намираме $AM = a\sqrt{7}$ и $CM = a\sqrt{5}$.

Отсечката AD е ортогоналната проекция на ръба AM в равнината на основата и $AD \perp AB$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $AM \perp AB$. Аналогично се доказва, че $CM \perp BC$.

math-bg.com



а) От $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ следва, че $\angle(MB, AD) = \angle(MB, BC) = \angle MBC$ и $\angle(MB, CD) = \angle(MB, AB) = \angle MBA$.

Пресмятаме $tg\sphericalangle MBC = \frac{MC}{BC} = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ *(1 точка)*

и $tg\sphericalangle MBA = \frac{AM}{AB} = \frac{a\sqrt{7}}{a} = \sqrt{7}$ *(1 точка)*

б) Нека $AC \cap BD = O$ и $ON \parallel BM$ $(N \in DM)$.

От $ON \parallel BM$ следва, че $BM \parallel (ACN)$ и ΔACN е сечението на λ с пирамидата.

(1 точка)

Точката N е средата на MD $(BO = DO, NO \parallel BM)$ и $ND = a$.

От питагоровата теорема за правоъгълните триъгълници ACD, AND и CND намираме $AC = AN = 2a$ и $CN = a\sqrt{2}$.

В равнобедрения ΔCND височината към основата CN е $h = \frac{a\sqrt{14}}{2}$, а лицето му е

$$S_{CND} = \frac{CN.h}{2} = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{14}}{2.2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}.$$

Забележка: Лицето на ΔACN може да пресметнем и като построим $DH \perp AC$. Тогава $NH \perp AC$ и след пресмятане на $DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $NH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, намираме

$$S_{ACN} = \frac{AC.NH}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}.$$ *(2 точка)*

в) Равнината λ разделя пирамидата на две тела: T_1 – пирамидата $ACDN$ и T_2 – многостенът с върхове A, B, C, M и N.

math-bg.com

Тогава $V_{T_1} = V_{ACDN} = \frac{1}{3} S_{ACD}.ND = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, *(1 точка)*

$V_{ABCDM} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.DM = \frac{1}{3} a^2\sqrt{3}.2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ и $V_{T_2} = V_{ABCDM} - V_{T_1} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3} - \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Следователно $V_{T_1} : V_{T_2} = 1:3$. *(1 точка)*

Забележка: Отношението на обемите може да пресметнем и като вземем предвид, че $S_{ABCD} = 2S_{ACD}$ и $MD = 2ND$. Тогава $\frac{V_{ACDN}}{V_{ABCDM}} = \frac{\frac{1}{3} S_{ACD}.ND}{\frac{1}{3} S_{ABCD}.MD} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{V_{T_1}}{V_{T_1} + V_{T_2}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}} = \frac{1}{3}$.

Зад. 3. Правата $y = x$ е ъглополовящата на I и III квадрант и нека $V(x_V;\, y_V)$ е върхът на параболата.

Тогава $y_V = x_V \Leftrightarrow x_V^2 + bx_V + c = x_V$, като $x_V = -\frac{b}{2}$ е корен на уравнението $x^3 + x^2 - 4x + 3 = x$.

От $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)^2 = 0$ следва, че $x = 1$ или $x = -3$. *(1 точка)*

При $x_V = 1$ намираме $b = -2$, $c = x_V - x_V^2 - bx_V = 1 - 1 + 2 = 2$ и $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(1 точка)

При $x_0 = -3$ получаваме $b = 6$, $c = x_V - x_V^2 - bx_V = -3 - 9 + 18 = 6$ и $f(x) = x^2 + 6x + 6$.

(1 точка)

Търсената допирателна е перпендикулярна на ъглополовящата на I и III квадрант и ще сключва ъгъл $135°$ с положителната посока на абсцисната ос. Тогава ъгловият ѝ коефициент е $k = \mathrm{tg}135° = -1$.

От $f'(x) = k$ намираме абсцисата x_0 на допирната точка и уравнението $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ на допирателната в тази точка:

$f(x) = x^2 - 2x + 2:\ 2x - 2 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ и $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 + 2 = -x + \frac{7}{4}$;

$f(x) = x^2 + 6x + 6:\ 2x + 6 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{7}{2}$ и

$y = -\left(x + \frac{7}{2}\right) + f\left(-\frac{7}{2}\right) = -x - \frac{7}{2} + \frac{49}{4} - 21 + 6 = -x - \frac{25}{4}$. *(3 точка)*

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

math-bg.com