МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – СОФИЯ-ГРАД
София 1303, ул. „Антим I", № 17, тел.:9356050, факс:9883937, e-mail: rio_sofia_grad@mon.bg, www rio-sofia-grad.com

LXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.12.2015 г.

XI клас

Задача 1.

От формулите на Виет: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = k \end{cases}$ (1) ***(0,5т.)*** $\begin{cases} x_3 + x_4 = 12 \\ x_3.x_4 = l \end{cases}$ (2) ***(0,5т.)***

$\vdots\!\vdots\ x_1, x_2, x_3, x_4$

$\vdots\!\vdots\ x_1, x_1q, x_1q^2, x_1q^3$

$$\begin{cases} x_1 + x_1q = 3 \ (1) \\ x_1.x_1q = k \quad (2) \\ x_1q^2 + x_1q^3 = 12 \ (3) \\ x_1q^2.x_1q^3 = l \quad (4) \end{cases}$$

4 равенства по ***0,5т.***
От (1) и (3) следва, че $q = \pm 2$ ***(1т.)***
Прогресията е растяща $\Rightarrow q = 2$ ***(1т.)***
$x_1(1+q) = 3$, $x_1 = 1$, $k = 2$ ***(1т.)***
$1^2.2^5 = l$, $l = 32$. ***(1т.)***

Задача 2.

(1) $a_{11} = a_1 + 10d = 32$, a_1 е първи член, d е разликата на аритметичната прогресия $\{a_n\}$ ***(0,5т.)***
(2) $b_{21} = b_1 + 20q = 43$, b_1 е първи член, q е разликата на аритметичната прогресия $\{b_n\}$ ***(0,5т.)***
(3) $S_{23}(c_n) = (-a_1 + a_2) - a_3 + a_4 - \cdots - a_{21} + a_{22} - a_{23} + (-b_1 + b_2) - b_3 + b_4 - \cdots - b_{21} + b_{22} - b_{23} = 11d - a_{23} + 11q - b_{23} = -60.$ ***(1т.)***
(4) $11d - a_1 - 22d + 11q - b_1 - 22q = -60$
$-a_1 - 11d - b_1 - 11q = -60$
(5) $-(a_1 + 10d) - d - (b_1 + 20q) + 9q = -60$
$-32 - d - 43 + 9q = -60$
(6) $9q - d = 15$ ***(1т.)***
(7) $S_{40}(c_n) = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{39} + a_{40}) + (-b_1 + b_2) + (-b_3 + b_4) + \cdots + (-b_{39} + b_{40}) = 100.$
$20d + 20q = 100$

math-bg.com

(8) $d+q=5$ ***(1т.)***
От (6) и (8) намираме $d=3$ и $q=2$. ***(0,5т.)***
От (1) и (2) намираме $a_1=2$ и $b_1=3$. ***(0,5т.)***
А) $b_{40}=b_1+39q=3+39.2=81$ ***(1т.)***
Б) $S_{100}(a_n)=\frac{100(2a_1+99d)}{2}=301.50=15050$. ***(1т.)***

<u>Задача 3.</u>

(1) С пълна математическа индукция доказваме, че $a_n>0$, за $\forall n\in N$.
$a_1=1>0$. Допускаме, че всички членове на редицата, с индекс по-малък или равен на n са положителни. От условието $a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$ следва, че $a_{n+1}>0$. ***(1т.)***

(2) Образуваме разликата: $a_{n+1}-a_n=1+\frac{1}{1+a_n}-a_n=\frac{1+a_n+1-a_n-{a_n}^2}{1+a_n}=\frac{2-{a_n}^2}{1+a_n}=\frac{(\sqrt{2}-a_n)(\sqrt{2}+a_n)}{1+a_n}$
(1т.)
(3) $a_1=1\leq\sqrt{2}$; $a_2=\frac{3}{2}\geq\sqrt{2}$
Образуваме две подредици на редицата $\{a_i\}$.
А) $\{a_{2k-1}\}$, за която ще докажем, че е монотонно растяща и ограничена отгоре.
Б) $\{a_{2k}\}$, за която ще докажем, че е монотонно намаляваща и ограничена отдолу. ***(2т.)***
(4) Образуваме $a_{n+1}-a_{n-1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})=\frac{2-{a_n}^2}{1+a_n}+\frac{2-a_{n-1}^2}{1+a_{n-1}}=$
$=\frac{2-\left(\frac{2+a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right)^2}{1+a_n}+\frac{2-a_{n-1}^2}{1+a_{n-1}}=(2-a_{n-1}^2)\frac{a_n+a_{n-1}+a_n.a_{n-1}}{(1+a_n).(1+a_{n-1})^2}$ ***(1т.)***
От (2) и (4) следва, че $\{a_{2k-1}\}$ е растяща и $a_{2k-1}\leq\sqrt{2}$, а $\{a_{2k}\}$ е намаляваща и $a_{2k}\geq\sqrt{2}$.
(5) От теоремата на Вайерщрас следва, че двете подредици са сходящи и нека техните граници са $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=m\geq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=l\geq 0$ ***(0,5т.)***
(6) Граничен преход $\left|\begin{array}{l} m=\frac{2+l}{1+l} \\ l=\frac{2+m}{1+m}\end{array}\right. \Rightarrow l=\frac{2+\frac{2+l}{1+l}}{1+\frac{2+l}{1+l}}=\frac{3l+4}{2l+3}$
$l^2=2$, $l=\sqrt{2}\Rightarrow m=\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. ***(1т.)***
$\Rightarrow l=m=\sqrt{2}$
Следователно $\{a_i\}$ е сходяща редица и нейната граница е $\sqrt{2}$. ***(0,5т.)***

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

math-bg.com

Задача 1.

а) Нека означим дадената аритметична прогресия с $\{a_n\}$

1) Намерена стойността на a_2 или a_1+d равна на 6 1т.

2) Приложено свойството на геометричната прогресия 2т.

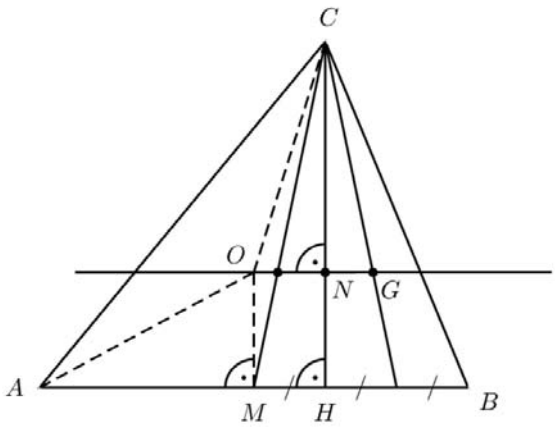
3) Получено уравнението $d^2-8d-48=0$. Намерени решенията $d_1=12$ и $d_2=-4$ 2т.

4) Направен извод, че само $d_2=-4$ е решение и намерено $a_1=10$ 2т.

math-bg.com

Задача 2.

а) Въвеждаме следните означения: страната $AB = c$, височина $CH = h$, медицентър на ΔHBC - G, център на описаната окръжност около ΔABC - O, радиусът на описаната окръжност R.



Направен чертеж и разсъждение, че OG разделя всички отсечки свързващи т. C с точки от AB в отношение 2:1. 0,5т.

Изразяване $R^2 = \left(\frac{c}{6}\right)^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2$ и $R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2$, от $\triangle CON$ и $\triangle AOM$

Приравнено и намерено $h = c\sqrt{\frac{2}{3}}$ 1т.

Намерени $AC = c\frac{\sqrt{10}}{3}$ и $BC = c\frac{\sqrt{7}}{3}$ 1т.

Намерени $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$ и $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{7}$ 0,5т.

Намерен $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{70}}{35}$ 1т.

б) Изразяване $CM = \frac{5c}{6}$ 1т.

Означаваме разликата на аритметичната прогресия с d.

Намерено $d = -\frac{c}{6}$ 1т.

Намерено $n=5$ 1т.

Задача 3.

а) 1) Изразена $S_n = -2n^2 + 14n$ 1т.

2) Даденото уравнение преобразувано до $3^x = \frac{S_n}{106.(19 - S_n)}$ или

$$3^x = \frac{-2n^2 + 14n}{2014 - 106.(-2n^2 + 14n)}$$ 1т.

3) Отразено, че $3^x > 0$ за $\forall x$ и направен извод, че $\frac{S_n}{106.(19 - S_n)} > 0$ или

$$\frac{-2n^2 + 14n}{2014 - 106.(-2n^2 + 14n)} > 0$$ 0,5т.

math-bg.com

4) Направена оценка за $S_n \in (0\ ;\ 19)$ и решена системата $\left| \begin{array}{l} -2n^2+14n>0 \\ -2n^2+14n<19 \end{array} \right.$

или решено неравенството $\dfrac{-2n^2+14n}{2014-106.(-2n^2+14n)} > 0$ и получено

$n \in \left(0\ ;\ \dfrac{7-\sqrt{11}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{7+\sqrt{11}}{2}\ ;\ 7\right)$ 1т.

5) Отчетено, че n ϵ N и намерено n=1 и n=6 0,5т.

б) 1) Положено $y = 5^{-x}$. Записано уравнението $y^2-(k^2+5k-6)y+5k^3-6k^2=0$

Направен е извод, че квадратното уравнение за **y** трябва да има единствено положително решение.

2) Намерени $y_1=k^2$ и $y_2=5k-6$ чрез формулите на Виет или $D=(k^2-5k+6)^2$ 1т.

3) Направен е извод, че при к=0 $y_1=k^2=0$ и $y_2=5k-6=-6$ и следователно к=0 не е решение на задачата. 0,5т.

4) Направен е извод, че при к≠0 и $y_1=k^2>0$ следва, че y_2 трябва да е неположително или $y_1=y_2$ 0,5т.

5) Решени 5к-6 ≤0 и $k^2=5k-6$ и записан отговор $k \in (-\infty;\ 0) \cup \left(0\ ;\ \dfrac{6}{5}\right] \cup \{2\} \cup \{3\}$ 1т.

math-bg.com