

**LXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА  
 ОБЩИНСКИ КРЪГ**  
**12.12.2015 г.**

**X клас**

**Задача 1.**

a)  $f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$ ,  $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2,5 \Rightarrow b = -5a$ ,  $f(2,5) = -2,25 \Rightarrow \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = -\frac{9}{4}$ .

$$\begin{cases} b = -5a \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + 4 = -\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 4$$

б)  $x^2 - 5x + 4 = 9 - x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 5 \Rightarrow y_1 = 10, y_2 = 4 \Rightarrow A(-1; 10), B(5; 4)$

$$S_{\triangle ABD} = S_{AMNP} - (S_{APD} + S_{DNB} + S_{BMA}) = \\ = 12,25 \cdot 6 - \left( \frac{12,25 \cdot 3,5}{2} + \frac{2,5 \cdot 6,25}{2} + \frac{6,6}{2} \right) = 26,25$$

**Критерии за оценяване:**

a) 0,5 т. –  $c = 4$

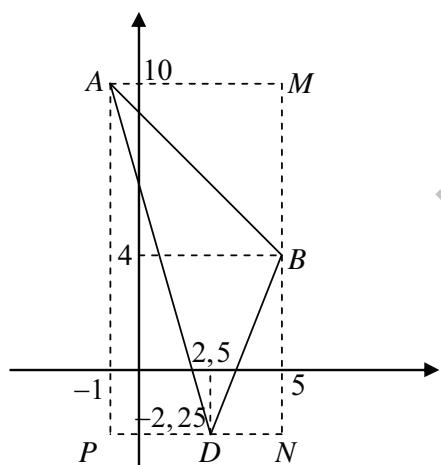
0,5 т. –  $b = -5a$

1 т. –  $\frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = -\frac{9}{4}$

1 т. –  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$

б) 2 т. –  $A(-1; 10), B(5; 4)$

2 т. –  $S_{\triangle ABD} = 26,25$



**Задача 2.**

a)  $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right) \cup (2; 8]$  1 т.

$x \in \left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$  2 т.

Отг. 34 1 т.

6)

$$x^2 + (a+2)x - a + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -a - 2, \quad x_1 x_2 = 1 - a$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 8a \geq 0 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+8) \geq 0 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \\ \frac{a^2 + 6a + 2}{1-a} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1т.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \\ \frac{a^2 + 8a}{1-a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \\ \frac{a(a+8)}{1-a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \\ a \in [-8; 0] \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in \{-8; 0\} \cup (1; +\infty) \end{aligned}$$

1т.  
1т.

### Задача 3.

$$\text{От } |x_1 - 1| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq 2 \quad 0,5\text{т.}$$

$$\text{От } |x_2 - 1| \geq 1 \Rightarrow x_2 \leq 0 \text{ или } x_2 \geq 2 \quad 0,5\text{т.}$$

Следователно за квадратния тричлен  $f(x) = x^2 - 3mx + m^2 - 4$

имаме два случая:

$$\text{I. } x_2 \leq 0 \leq x_1 \leq 2 \quad 0,5\text{т.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \text{ т.e} \quad 1\text{т.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \leq 0 \\ m^2 - 6m \geq 0 \end{cases} \quad 1\text{т.}$$

$$\text{откъдето } m \in [-2; 0] \quad 0,5\text{т.}$$

$$\text{II. } 0 \leq x_1 \leq 2 \leq x_2 \quad 0,5\text{т.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \text{ т.e} \quad 1\text{т.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 6m \leq 0 \\ m^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \quad 1\text{т.}$$

$$\text{откъдето } m \in [2; 6]$$

окончателно  $m \in [-2; 0] \cup [2; 6]$  0,5т.

*Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*