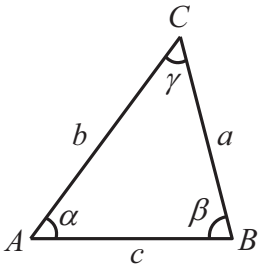
LXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.12.2015 г. - КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ - XII клас



Задача 1. ***Решение:*** От равенствата $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$

намираме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2.\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$ и $\cos\beta = 2.\dfrac{5}{9} - 1 = \dfrac{1}{9}$.

Пресмятаме $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{81}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ и означаваме $\measuredangle C = \gamma$, $\sin\alpha = 4x$, $\cos\alpha = 3x$

($x > 0$, тъй като $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и α е остър ъгъл). Тогава $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 9x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{25}$,

$x = \dfrac{1}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ и

$$\sin\gamma = \sin\left[180^\circ - (\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta = \frac{4}{5}.\frac{1}{9} + \frac{3}{5}.\frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{4\left(1+3\sqrt{5}\right)}{45}.$$

От синусовата теорема $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{AB}{\sin\gamma} \Leftrightarrow \dfrac{5BC}{4} = \dfrac{9AC}{4\sqrt{5}} = \dfrac{45\left(1+3\sqrt{5}\right)}{4\left(1+3\sqrt{5}\right)}$ намираме $BC = \dfrac{45.4}{4.5} = 9$

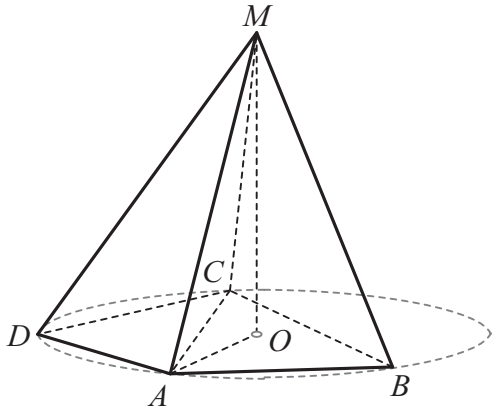
и $AC = \dfrac{45.4\sqrt{5}}{4.9} = 5\sqrt{5}$. Лицето на $\triangle ABC$ е $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC}{2}\sin\alpha = \dfrac{\left(1+3\sqrt{5}\right).5\sqrt{5}.4}{2.5} = 30 + 2\sqrt{5}$.

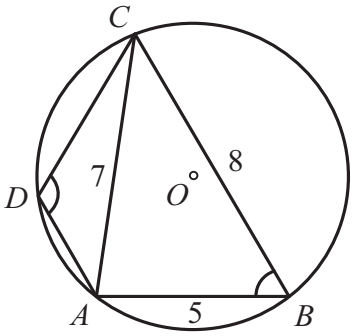
Примерно оценяване.

Намиране на: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ **(1 т.)**; $\cos\beta = \dfrac{1}{9}$ и $\sin\beta = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ **(1 т.)**; $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ **(1 т.)**;

$\sin\gamma = \dfrac{4\left(1+3\sqrt{5}\right)}{45}$ **(1 т.)**; $BC = 9$ **(1 т.)**; $AC = 5\sqrt{5}$ **(1 т.)**; $S_{ABC} = 30 + 2\sqrt{5}$ **(1 т.)**.

Задача 2. ***Решение:*** Ако M е върхът на пирамидата, от $MA = MB = MC = MD$ следва, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O.





math-bg.com

От косинусовата теорема за ΔABC намираме $\cos\sphericalangle ABC = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC} = \frac{25+64-49}{2.5.8} = \frac{1}{2}$ и $\measuredangle ABC = 60°$. Тогава $\measuredangle ADC = 120°$, от което следва, че AC е най-голямата страна в ΔADC.

Означаваме $AC = 7$, $CD = 7+d$, $AD = 7+2d$, където $-\frac{7}{2} < d < 0$ е разликата на прогресията $\div AC, CD, AD$. Прилагаме косинусовата теорема за страната AC в ΔADC:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD.\cos 120° \Leftrightarrow 49 = (7+2d)^2 + (7+d)^2 + 2(7+2d)(7+d)\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 = 49+28d+4d^2+49+14d+d^2+49+21d+2d^2 \Leftrightarrow 7d^2+63d+98=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2+9d+14=0 \Leftrightarrow d_1=-7,\ d_2=-2,$$ като решение е само $d=-2$.

Тогава $CD = 5,\ AD = 3$, $S_{ADC} = \frac{1}{2}AD.CD.\sin 120° = \frac{1}{2}.3.5.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.\sin 60° = \frac{1}{2}.5.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40\sqrt{3}}{4}$ и $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$. Обемът на пирамидата е

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.MO = \frac{1}{3}.\frac{55\sqrt{3}}{4}.4\sqrt{3} = 55$. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме

$2R = AC : \sin\sphericalangle ABC = 7 : \sin 60° = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ и $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. В правоъгълния ΔAOM

$MA^2 = AO^2 + MO^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = \frac{49}{3} + 48 = \frac{193}{3}$. Тогава $MA = MB = MC = MD = \frac{\sqrt{579}}{3}$.

Примерно оценяване.

Намиране на: $\measuredangle ABC = 60°$ **(1 т.)**; $CD = 5$ и $AD = 3$ **(2 т.)**; $S_{ABCD} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$ **(1 т.)**; $V = 55$ **(1 т.)**; $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ **(1 т.)**; $MA = MB = MC = MD = \frac{\sqrt{579}}{3}$ **(1 т.)**.

Задача 3. ***Решение:*** Полагаме $\cos x = u \in [-1;1]$ $\quad f(u) = u^2 + au + 1 - a^2 = 0$

а) $u_1 \in [-1;1]$ или $u_2 \in [-1;1]$

б) $u_1 \in [-1;1]$ и $u_2 \in [-1;1]$, $\quad -1 \le u_2 \le u_1 \le 1$

Разглеждаме три случая:

I.) Един от корените на $f(u)$ е равен на 1 или -1.

$$f(1) = 1+a+1-a^2 = -a^2+a+2 \Rightarrow a^2-a-2=0$$

$a = 2$ и $a = -1$

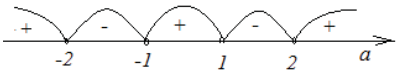
$$f(-1) = (-1)^2 - a + 1 - a^2 = -a^2 - a + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$a = 1$ и $a = -2$

II.) НДУ точно един от корените на $f(u)$ да е в интервала $(-1;1)$ е $f(-1).f(1) < 0 \Rightarrow$

math-bg.com

$\left(-a^2-a+2\right)\left(-a^2+a+2\right)<0 \quad <=> \quad (a-2)(a+2)(a-1)(a+1)<0 \quad => \quad a=\pm 1,\ a=\pm 2$

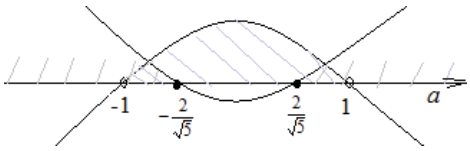


$=> a\in(-2;1)\cup(1;2)$

III.) Двата корена на уравнението $f(u)$ са в итервала $(-1;1)$ <=>

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1<\dfrac{-b}{2a}<1 \end{cases} => \begin{cases} a^2-4-4a^2\ge 0 \\ -a^2-a+2>0 \\ -a^2+a+2>0 \\ -1<-\dfrac{a}{2}<1 \end{cases} <=> \begin{cases} 5a^2-4\ge 0 \\ a^2+a-2<0 \Rightarrow a_1=1, a_2=-2 \\ a^2-a-2<0 \Rightarrow a_1=2, a_2=-1 \\ -2<-a<2 \,/(-1) \end{cases} <=>$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}a-2\right)\left(\sqrt{5}a+2\right)\ge 0 \\ a\in(-2;1) \\ a\in(-1;2) \\ a\in(-2;2) \end{cases} <=> \begin{cases} a\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}};+\infty\right) \\ a\in(-1;1) \end{cases} =>$$



$=> \quad a\in\left(-1;-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}};1\right)$

math-bg.com

От I.), II.) и III.) $=> a\in[-2;-1]\cup\left(-1;-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}};1\right)\cup[1;2] \quad =>$

$a\in\left[-2;-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}};2\right]$

Примерно оценяване:

За полагане $\cos x=u\in[-1;1]$ и определяне на

а) $u_1\in[-1;1]$ или $u_2\in[-1;1]$

б) $u_1\in[-1;1]$ и $u_2\in[-1;1]$, $\quad -1\le u_2\le u_1\le 1$ — 1 т.

За разглеждане на трите случая:

I.) Един от корените на $f(u)$ е равен на 1 или -1. — 1 т.

II.) НДУ точно един от корените на $f(u)$ да е в интервала $(-1;1)$ — 2 т.

III.) Двата корена на уравнението $f(u)$ са в интервала $(-1;1)$ — 2 т.

За определяне че от I.), II.) и III.) $=> a\in\left[-2;-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}};2\right]$ — 1 т.

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 16 точки.