LXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.12.2015 г. - КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ - XI клас

Задача 1. Ако $f(x)=6^x$, то $f(0)=6^0=1$, $f(2)=6^2$, $f(4)=6^4$, $f(6)=6^6$, $f(8)=6^8$

Заместваме в уравнението $6f(x)-1=35\left[1+6^2+6^4+6^6+6^8\right]$ **2 точки**

Числата $1, 6^2, 6^4, 6^6, 6^8$ образуват геометрична прогресия с първи член $a_1=1$ и частно $q=6^2$ **1 точка**

и сумата им $1+6^2+6^4+6^6+6^8=S_5=a_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=1.\dfrac{\left(6^2\right)^5-1}{6^2-1}=\dfrac{6^{10}-1}{35}$ **2 точки**

Заместваме в уравнението $6.6^x-1=35.\dfrac{6^{10}-1}{35}\Leftrightarrow 6.6^x-1=6^{10}-1$

и намираме решението му $6.6^x=6^{10}\Leftrightarrow 6^{x+1}=6^{10}\Leftrightarrow x+1=10\Leftrightarrow x=9$ **2 точки**

Задача 2

а) За ъглите $\div\alpha,\beta,\gamma$ е изпълнено $\left|\begin{array}{l}2\beta=\alpha+\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\beta=60^\circ\\ \alpha+\gamma=120^\circ\end{array}\right.$ **1 точка**

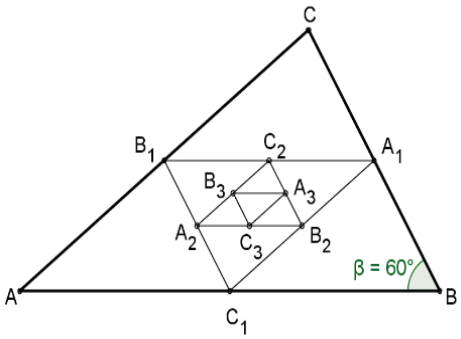
Нека означим $BC=a=5$, $AC=b=7$ и $AB=c>0$. От косинусова теорема за $\Delta ABC\Rightarrow$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\Rightarrow 7^2=5^2+c^2-2.5.c.\cos 60^\circ$ намираме страната AB като положителният корен на квадратното уравнение $c^2-5.c-24=0$ $c_1=8$ $c_2=-3$, $AB=8\,см$. **1,5 точки**

Лицето на триъгълника пресмятаме по формулата

$S_{ABC}=\dfrac{ac\sin\beta}{2}=\dfrac{5.8}{2}.\sin 60^\circ=20.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\,см^2.$ **1 точка**

б) Средите на страните на $\Delta A_1B_1C_1$ са средни отсечки за ΔABC. Средите на страните на $\Delta A_2B_2C_2$ са средни отсечки за $\Delta A_1B_1C_1$. Средите на страните на $\Delta A_3B_3C_3$ са средни отсечки за $\Delta A_2B_2C_2$ и т.н. $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta A_2B_2C_2\sim\Delta A_3B_3C_3\sim\cdots$ по трети признак с коефициент $k=2$. **1 точка**

Лицата им се отнасят $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_2}{S_3}=\cdots=k^2=4$



$S_{ABC}=S=10\sqrt{3}\,см^2.$ $S_{A_1B_1C_1}=S_1=\dfrac{1}{4}S=\dfrac{10\sqrt{3}}{4}\,см^2.$

$S_{A_2B_2C_2}=S_2=\dfrac{1}{4}S_1=\dfrac{10\sqrt{3}}{16}\,см^2.$ $S_{A_3B_3C_3}=S_3=\dfrac{1}{4}S_2=\dfrac{10\sqrt{3}}{64}\,см^2$

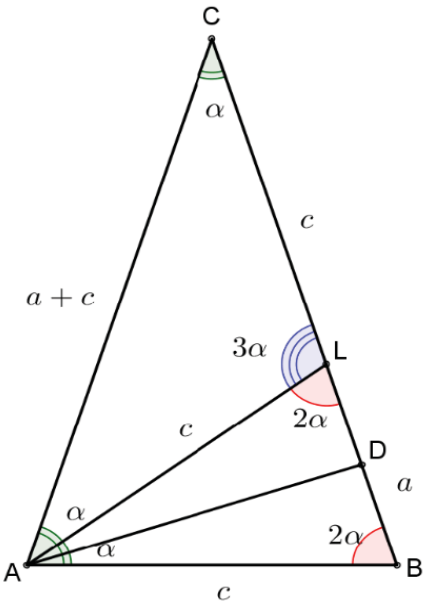
…. **1 точка**

Получава се редицата от лица $S,S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$, която е геометрична прогресия с частно $q=\dfrac{1}{4}$ и е безкрайно малка. **0,5 точки**.

$\Sigma=S+S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\dfrac{S}{1-q}=\dfrac{10\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{4}}=10\sqrt{3}.\dfrac{4}{3}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\,см^2.$ **1 точка**

math-bg.com

Задача 3



а) Нека означим $AB = AL = CL = c$ и $BL = a$,
тогава бедрата на триъгълника са $AC = BC = a + c$.
AL ъглополовяща и нека да означим $\angle BAL = \angle CAL = \alpha$.
За ъглите на равнобедрения $\Delta ABC \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC = 2\alpha$.
За ъглите на равнобедрения $\Delta ABL \Rightarrow \angle ABL = \angle ALB = 2\alpha$.
За ъглите на равнобедрения $\Delta ALC \Rightarrow \angle LAC = \angle ACL = \alpha$.
От ΔABC или ΔABL се намира $5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$.
Ъглите на равнобедрения ΔABC са $\angle A = \angle B = 72°$ и $\angle C = 36°$

1,5 точки

AL ъглополовяща в $\Delta ABC \Rightarrow CL : BL = AC : AB \Rightarrow$

$\frac{c}{a} = \frac{a+c}{c}$; $\frac{c}{a} = \frac{a}{c} + 1$

Нека означим търсеното отношение $\frac{CL}{BL} = \frac{c}{a} = x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x} + 1$

Корените на уравнението $x^2 - x - 1 = 0$ са $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Положителният корен е $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{CL}{BL} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **2 точки**

(търсеното отношение е известно като „златното сечение" $\approx 1{,}618...$).

math-bg.com

б) Нека AD е височината в равнобедрения $\Delta ABL \Rightarrow AD$ е медиана.
От правоъгълния ΔABL намираме

$$\cos 72° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2c} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ **1,5 точки**

$$\cos^2 36° = \frac{1+\cos 72°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$$

$$\sin 54° = \sin(90 - 36°) = \cos 36° = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+6}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+5+1} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$ **2 точки**

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.

За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 16 точки.